TEORIE VĚDY / THEORY OF SCIENCE / 2024
https://doi.org/10.46938/tv.2024.613

////// přehledová studie / survey article //////////////////////////

VÝVOJ A INTERPRETACE POJMU PRAVDĚPODOBNOST

Abstrakt: *Úvahy spojené s náhodností se v evropské historii objevují poměrně pozdě, na přelomu středověku a novověku. Týkají se zpočátku šancí výhry v různých hrách či situacích a později přecházejí k zavedení pravděpodobnosti klasické a geometrické. Počet pravděpodobnosti je z matematického hlediska završen Kolmogorovovou axiomatickou teorií. Ve způsobu vnímání a v interpretaci pravděpodobnosti však přetrvává mnoho otevřených otázek, problémů a paradoxů. Čtyři hlavní směry v pojetí pravděpodobnosti (logické, četnostní, subjektivní a propenzitní) úzce souvisejí se způsobem vnímání náhodnosti (epistemologickým nebo ontologickým). Úvahy o vývoji vnímání náhodnosti a interpretace pravděpodobnosti přinášejí schopnost orientovat se v základních principech a poznatcích vědy a přispívají k hlubšímu pochopení celé problematiky.*

Klíčová slova: *náhoda; pravděpodobnost; princip indiference; Bertrandův paradox*

Development and Interpretation of the Concept of Probability

Abstract: *Considerations related to randomness appear relatively late in European history, at the turn of the Middle Ages and the modern era. They initially concern to the chances of winning in various games or situations and later move on to introduce classical and geometric probabilities. From a mathematical point of view, the probability calculus is completed by Kolmogorov's axiomatic theory. However, many open questions, problems and paradoxes remain in the way probability is perceived and interpreted. The four main directions in the concept of probability (logical, frequentist, subjective and propensity) are closely related to the way of perceiving randomness (epistemological or ontological). Reflections on the evolution of the perception of randomness and the interpretation of probability bring the ability to navigate the basic principles and findings of science and contributes to a deeper understanding of the entire issue.*

Keywords: *random; probability; principle of indifference; Bertrand's paradox*

FRANTIŠEK MOŠNA
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Pedagogická fakulta UK
Magdalény Rettigové 4, 116 39 Praha
email / frantisek.mosna@pedf.cuni.cz
0000-0002-4941-9393

1. Úvod

Za matematickou činnost zpravidla považujeme výpočty nebo zkoumání vlastností struktur, řešení úloh, dokazování a odvozování. Nové myšlenky však vznikají často při přemýšlení o základních pojmech, principech a otázkách, jsou-li nahlíženy v širších souvislostech. Poznatky o vývoji matematiky v dějinách, o interpretaci matematických pojmů a aplikacích přinášejí hlubší pochopení smyslu a významu této vědní disciplíny. Filosofický nadhled poskytuje pochopení celé problematiky, přispívá ke krystalizaci poznatků a může přinášet nové nápady.

Náhoda prostupuje našimi životy. Co je to vlastně náhoda a jak se k ní vztahujeme? Jaké k tomu užíváme prostředky? V náhodě býval a mnohdy bývá spatřován projev Boží vůle. Například Anatole France v souladu s touto představou říká: „Náhoda je pseudonym, který Bůh používá, když se nechce podepsat.“[1]

Snaha o to uchopit, postihnout či popsat nějakým způsobem náhodnost vedla ke vzniku počtu pravděpodobnosti. Od doby racionalistů si představujeme, že náhoda je v souladu s deterministickými představami něco jako nedostatek informací. Náhoda v událostech a dějích kolem nás znamená, že neumíme dopředu jednoznačně předpovědět, jak dopadnou. Jde o vztah našeho vědomí k pozorovaným dějům. Takové pojetí nazýváme epistemologické. Kvantová fyzika přinesla odlišné poznání, že totiž náhodnost je nedílnou a neredukovatelnou součástí světa, ve kterém se nalézáme, a že popis tohoto světa se bez náhodnosti neobejde. Toto pojetí zpravidla nazýváme ontologické. Podíváme se na vývoj pojmů náhodnost a pravděpodobnost v dějinách, pokusíme se zorientovat ve vnímání náhody a interpretaci pravděpodobnosti v minulosti.

2. Náhoda a vznik pojmu pravděpodobnost

V minulosti si lidé náhodnost uvědomovali v mnoha situacích, nejčastěji při uvažování o budoucnosti a při různých hrách. Prostřednictvím věštění se v minulosti k člověku dostávaly podněty z jakéhosi jiného světa – projevy a záměry Boží vůle. Také při hrách se projevovala přízeň či nepřízeň vyšší moci. Archeologické nálezy předmětů dokládajících věštění a hry pocházejí už z doby před 40 000 lety. Objevují se odedávna ve všech civilizacích – v Mezopotámii, Egyptě, Řecku, Římě i Indii. Také v Evropě ve středověku

[1] Ian Stewart, *Hraje bůh kostky?* (Praha: Argo – Dokořán, 2009), 413.

a v pozdějších dobách se hry v kostky a v karty těšily poměrně značné oblibě, přestože hojně docházelo ke kritice, zákazům a omezením ze strany církve i státu.

Historici matematiky se často zamýšlejí nad otázkou, proč se počet pravděpodobnosti dočkal rozvoje až poměrně pozdě. Nepochybně existovalo mnoho faktorů, které například starým Řekům bránily ve vývoji teorie pravděpodobnosti, přestože v geometrii dosahovali velmi vysoké úrovně. Vývoj teorie pravděpodobnosti však vyžadoval spíše aritmetiku a algebru – přesně ty oblasti, které se u Řeků netěšily příliš velké pozornosti. Řekové neměli příliš dobrý systém pro reprezentaci čísel a pro provádění aritmetických výpočtů. Až v pozdějších dobách matematici dospěli k moderní indicko-arabské desítkové soustavě a dalším metodám vhodných pro počet pravděpodobnosti. Donald Gillies si v této souvislosti klade otázku:

> Mohlo binomické rozdělení vzniknout bez dobrého algebraického zápisu? Mohly by se limitní věty Jacoba Bernoulliho a de Moivre objevit bez vývoje jak v algebře, tak v kalkulu? Řekové byli vášnivými hráči i zkušenými matematiky, ale jejich matematika prostě nebyla vhodná pro analýzu hazardních her.[2]

Označovat počátek nějakého oboru a spojovat ho s určitou osobou a zemí je vždy velmi problematické a zavádějící, často se později objeví doklady staršího výskytu nebo zmínek. Renesance a novověk přinesly snahy o vysvětlení mnohých jevů, také jevů souvisejících s náhodou. Úlohy týkající se odhadování výsledku nějakého náhodného jevu se týkali nejčastěji spravedlivého rozdělení sázky při předčasném ukončení hry a házení jedné, dvou a více kostek.[3]

Oběma typy úloh se zabývali učenci ve 14.–16. století. Například italský lékař, matematik, filosof, astronom, astrolog Gerolamo Cardano (1501–1576) tyto úlohy znal, řešil je však neúspěšně. Úloha o rozdělení sázky byla nalezena v mnoha rukopisech a měla zřejmě arabský původ. Vyskytuje se v mnoha formách, někdy je hra na osm vítězství přerušena za stavu 5:3, jindy je hra na šest vítězství přerušena za stavu 4:3. Objevují se také úlohy o rozdělení sázky mezi tři hráče. Nesprávná řešení takových úloh předkládá také obchodník, mnich a matematik Luca Bartolomeo di Pacioli (patrně 1447–1517) v knize *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et propor-*

[2] Donald Gillies, *Philosophical Theories of Probability* (London: Routledge, 2000), 22.
[3] Ivan Saxl, „Pravděpodobnost ve středověku," *Informační bulletin České statistické společnosti* 20, č. 2 (2009): 1–9.

tionalita (1494) nebo italský matematik Tartaglia (1499–1557, vlastním jménem Niccolo Fontana) v knize *General trattato di numeri et misure* (1556).

První kombinatorické úlohy související s odhadem šancí při házení třemi kostkami nacházíme v básni *De Vetula* od Richarda de Fournivala (1201–patrně 1260), humanisty a kancléře katedrály v Amiens. Otázkou výsledků hodu třemi kostkami se v *Božské komedii* zabývá italský básník Dante Alighieri (1265–1321), dále už zmíněný Girolamo Cardano a Galileo Galilei (1564–1642) ve spisku *Sopra le scoperte dei dadi* (1612), kde dochází ke správnému závěru, že součet 10 má větší šanci než součet 9. Někteří matematici při řešení podobných úloh docházeli k mylným výsledkům, například Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) a Jean le Rond d'Alembert (1717–1783). Druhý z nich uvádí v *Encyklopedii* (1754), že při hodu dvěma mincemi je pravděpodobnost padnutí alespoň jednoho líce rovna 2/3, přičemž správný výsledek je 3/4.[4]

Za počátek počtu pravděpodobnosti v novověku je obecně považována korespondence mezi Blaisem Pascalem (1623–1662) a Pierem de Fermatem (1601–1665) z léta a podzimu roku 1654.[5] Aniž se setkali, tito dva matematici si vyměnili několik dopisů, v nichž jsou řešeny oba zmíněné typy úloh. Podnět k velmi známé úloze o házení kostkami poskytl Antoine Gombaud rytíř de Mére (1607–1684). V roce 1653 se o své problémy při svých sázkách u francouzského dvora podělil s Blaisem Pascalem patrně při společné cestě do Poitou, a tím položil základy počtu pravděpodobnosti. Siméon Denis Poisson (1781–1840) údajně prohlásil: „Začátek pravděpodobnosti je spojen s problémem, který předložil světák [míněno de Mére] přísnému jansenistovi [míněno Pascal]."[6]

Pascal a de Fermat přímou definici pravděpodobnosti ještě neformulovali, zabývali se vždy jakousi šancí ve hře a k jejímu výpočtu používali poměry výhry, zlomky a kombinatorické úvahy. Pascal se domníval: „Nejistota náhody se řídí jistými početními pravidly tak, že dvěma hráčům se vždy dostane přesně to, co jim náleží."[7]

Další z matematiků zabývajících se náhodou, Christiaan Huygens (1629–1695), se při svém pobytu v Paříži seznámil s korespondencí de Fer-

[4] Jiří Anděl, *Matematika náhody* (Praha: Matfyzpress, 2003), 12.

[5] Jan Coufal, „Alea iacta est aneb půl století od vytištění úlohy rytíře de Mére," *Informační bulletin České statistické společnosti* 5, č. 1, 2 (1994): 10–18; 3–10.

[6] Gillies, *Philosophical Theories of Probability*, 3.

[7] Lorraine Daston, *Classical Probability in the Enlightenment* (Princeton: Princeton University Press, 1988), 7.

mata a Pascala. Jejich myšlenky rozvinul a shrnul v díle *De ratiociniis in ludo aleae* (1657).

Od dob Jacoba Bernoulliho však už lze hovořit o pojmu pravděpodobnost. Rodina Bernoulliů pocházela z oblasti Nizozemí, nejspíše z Antverp, a po mnoha stěhováních se usadila ve Švýcarsku v Basileji. Nejvýznamnějšími matematiky tohoto jména byli bratři Jacob (1655–1705) a Johann Bernoulli (1667–1748). Matematikou se zabývali též synové Johanna, Nicolaus Bernoulli (1695–1726) a Daniel Bernoulli (1700–1782), a dále pak synovec obou bratří Nicolaus Bernoulli (1687–1759).

Významných výsledků z pravděpodobnosti dosáhl především první z bratří Jacob. Ve svém spisu *Ars conjectandi* navazuje na dílo Christiana Huygense, komentuje ho a podává velmi obsáhlé doplňky. Nalézáme zde také první náznaky klasické definice pravděpodobnosti: „Pravděpodobnost je stupeň jistoty a liší se od úplné jistoty tak, jako se část liší od celku.“[8]

Z Jacobových výsledků dnes známe především tzv. Bernoulliovu větu. Jde o nejstarší tvrzení, které zahrnujeme mezi tzv. zákony velkých čísel, jež popisují vztah mezi relativní četností jevu a jeho teoretickou pravděpodobností.

Jestliže pojednáváme o zavedení pravděpodobnosti, nelze opomenout Abrahama de Moivra (1667–1754).[9] Jeho postupně rozšiřovaná učebnice teorie pravděpodobnosti *The Doctrine of Chances: A Method of Calculating the Probabilities of Events in Play* (1718, 1738, 1756) obsahuje úvahy o hazardních hrách, často ověřených z vlastní zkušenosti. Moivre zavádí pravděpodobnost jako jistý poměr příznivých a všech případů: „Relativní počet příznivých případů k celkovému počtu všech příznivých i nepříznivých případů je míra pravděpodobnosti.“[10]

Od Moivrea pochází nejstarší tvrzení, jež zahrnujeme mezi tzv. centrální limitní věty. Otevřel tím cestu k zavedení normálního rozdělení, které je velice důležité v teorii pravděpodobnosti a statistiky. Dále položil základy Poissonova rozdělení a přispěl též principem inkluze a exkluze.

[8] Jacob Bernoulli, *Ars conjectandi* (Basel: Thurnisiorum Fratrum, 1713), 211.

[9] Ivan Saxl a Lucia Ilucová, „Abraham de Moivre,“ in *Matematika v proměnách věků V.*, eds. Martina Bečvářová a Jindřich Bečvář (Praha: Matfyzpress, 2007), 6–55; nebo Jan Kalina a Lubomír Soukup, „Doktrína šancí: 300. výročí první učebnice teorie pravděpodobnosti,“ *Informační bulletin České statistické společnosti* 29, č. 1 (2018): 1–11.

[10] Ivan Saxl, „Filosofické interpretace pravděpodobnosti,“ in *Matematika v proměnách času III.*, eds. Jindřich Bečvář a Eduard Fuchs (Praha: Výzkumné centrum pro dějiny vědy, 2004), 132–55.

Na práce Huygense a Bernoulliů navazuje francouzský matematik Pierre R. de Montmort (1678–1719) ve své knize *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* (1708, 1713). Pravděpodobností se zabýval též skotský lékař a matematik John Arbuthnot (1667–1735), který v díle *An Argument for Divine Providence, Taken from the Constant Regularity Observed in the Births of Both Sexes* (1710) zkoumal pravidelnost při rození chlapců a dívek a postupoval při tom podobně jako dnešní statistika při testování hypotéz.

Jako příslovečná červená nit se dějinami pravděpodobnosti a statistiky táhne pojetí pravděpodobnosti pocházející od anglického duchovního Thomase Bayese (1701–1761). Jeho přístup je založen na tzv. podmíněné pravděpodobnosti, nezávislosti náhodných jevů a poznatků s tím souvisejících, jako je věta o úplné pravděpodobnosti a Bayesova věta.[11] S tímto chápáním pravděpodobnosti se setkáváme u všech interpretací a pojetí pravděpodobnosti. V současnosti se bayesovská analýza problémů těší značné pozornosti a oblibě zejména díky dostupnosti výpočetní techniky a v souvislosti s rozvojem Markov Chain Monte Carlo algoritmů.[12]

3. Klasická pravděpodobnost

Francouzský matematik a fyzik Pierre-Simon Laplace (1749–1827) navázal na myšlenky Jacoba Bernoulliho a de Moivrea a systematicky shrnul a završil dlouhý vývoj pojmu pravděpodobnost. Ve svých spisech *Essai philosophique sur les probabilit*és (1814) a *Théorie analytique des probabilités* (1812, 1820) zavádí tzv. klasické pojetí pravděpodobnosti.

Od dob Newtona převládal deterministický pohled na svět v myslích vědců celé 18. a 19. století a byl narušen až otázkami vzešlými zejména z problémů s interpretací kvantové fyziky. Klasická pravděpodobnost vychází z tohoto mechanistického chápání jsoucna.

Laplace uvažuje o jakési univerzální bytosti nevyčerpatelné inteligence (tzv. Laplaceův démon), která ví o světě v každém okamžiku vše a pravděpodobnost pro ni ztrácí smysl, neboť vše má své příčiny a důsledky. Laplace o této inteligenci píše:

[11] Karel Mačák, „Poznámky k formování teorie pravděpodobnosti v XVII. a XVIII. století," in *Historie matematiky II. Seminář pro vyučující na vysokých školách*, eds. Jindřich Bečvář a Eduard Fuchs (Praha: Prometheus, 1997), 29–68.

[12] Dani Gamerman and Hedibert F. Lopes, *Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference* (Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2006).

> Měli bychom považovat současný stav vesmíru za výsledek jeho předchozího stavu a za příčinu stavu, který bude následovat. Představme si na okamžik inteligenci, která by byla schopna pojmout všechny síly hýbající přírodou včetně tvorů, které jsou její součástí – inteligenci natolik rozsáhlou, aby uměla tato data podrobit analýze – ta by pak popisovala stejným vzorcem pohyby největších těles ve vesmíru i nejlehčích atomů, pro ni by nebylo nic nejisté, v jejích očích se budoucnost i minulost stává přítomností.[13]

Pojem pravděpodobnost pro tuto bytost vlastně neexistuje, pro ni je vše v minulosti, přítomnosti i budoucnosti jistotou, ona vše ví a obsáhne. Petr Vopěnka ukazuje, že tento Laplaceův démon nemůže pocházet z tohoto světa.[14] Jen proto, že nedokonalé lidské bytosti nedosahují absolutních znalostí, přicházejí s pojmem náhody a pravděpodobnosti. Laplace vnímá náhodnost jako důsledek omezenosti lidského poznání. Podobné pojetí zastávali Baruch Spinoza (1632–1677) a d'Alembert. Spinoza píše v roce 1677: „Událost může být považována za náhodnou jedině ve vztahu k našim nedostatečným znalostem."[15]

Podobně d'Alembert v roce 1750 uvádí: „Přesně vzato, neexistuje žádná náhoda, jedině její ekvivalent: naše nevědomost, díky níž my sami jsme její příčinou."[16]

Náhodnost znamená pro lidské bytosti pouhý nedostatek informací, nemožnost rozhodnutí o správnosti variant. Laplace píše:

> Křivka popsaná jednoduchou molekulou vzduchu nebo páry se řídí stejnými pravidly jako planetární oběžné dráhy; jediný rozdíl mezi nimi spočívá v naší nevědomosti. Pravděpodobnost je relativní, částečně vzhledem k této nevědomosti a částečně k našim znalostem. Víme, že ze tří nebo více událostí by jedna měla nastat; ale nic nás nevede k přesvědčení, že jedna z nich nastane spíše než ostatní. V této situaci nerozhodnosti je pro nás nemožné prohlásit jejich výskyt s jistotou.[17]

Laplace formuluje (ve shodě s Bernoullim a Leibnizem) princip, že v důsledku nevědomosti nemáme důvod některý z výsledků upřednostňovat a považovat ho za bližší uskutečnění než ostatní. Tato zásada bývá nazývána

[13] Pierre Simon Laplace, *Philosophical Essay on Probabilities* (New York: Dover, 1952), 4.
[14] Petr Vopěnka, *Hádání v hospodě* (Praha: Práh, 2013).
[15] Saxl, „Filosofické interpretace pravděpodobnosti," 134.
[16] Ibid., 134.
[17] Laplace, *Philosophical Essay on Probabilities*, 6.

principem indiference (*principle of indifference*[18]) nebo principem nedostatečného rozlišení, nedostatečného důvodu (*principle of insufficient reason*). Uvedený princip vede k rovnoměrnosti, což je v některých případech omezující požadavek a brání řešení některých úloh. Laplace dále uvažuje:

> Teorie náhody spočívá v tom, že všechny události stejného druhu omezíme na určitý počet případů stejně možných, tj. takových, že o nich můžeme být stejně nerozhodnuti, pokud jde o jejich uskutečnění, a v tom, že nalezneme počet případů příznivých jevu, jehož pravděpodobnost hledáme. Poměr tohoto počtu ku počtu všech možných případů je mírou této pravděpodobnosti, jde jednoduše o zlomek, jehož čitatelem je počet příznivých případů a jehož jmenovatelem je počet všech možných případů.[19]

Klasickou pravděpodobnost zavádíme pro konečnou množinu všech možných výsledků Ω, o nichž předpokládáme, že jsou rovnocenné z hlediska toho, jestli nastanou či nikoli. Pravděpodobnost je pak definována jako podíl počtu možných výsledků odpovídajících určitému jevu A ku počtu všech možných výsledků zahrnutých do Ω (počet prvků množiny M značíme symbolem $|M|$):

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Jedním z nedostatků klasické pravděpodobnosti pomocí možných výsledků je poněkud vágní formulace týkající se jejich rovnocennosti z hlediska toho, jestli nastanou či nikoli. Nejde zde o definici v matematickém smyslu. Snahy o její upřesnění však zpravidla vedou k definici kruhem, protože bychom k přesné formulaci potřebovali pojem pravděpodobnost, ale ten se teprve pokoušíme zavést.

Klasickou definici pravděpodobnosti zpravidla zahrnujeme mezi epistemologické interpretace, jindy bývá považována za samostatné pojetí. Někteří badatelé (Hacking, Daston) si všímají, že Laplaceovo pojetí pravděpodobnosti je dvojznačné, zčásti epistemologické a zčásti ontologické, a přisuzují mu tzv. Janusovu tvář.[20] Hacking si uvědomuje rozpor mezi Laplaceovým vnímáním pravděpodobnosti ve smyslu matematickém a filosofickém, když píše:

[18] John Maynard Keynes, *A Treatise on Probability* (New York: Macmillan, 1963), 42.
[19] Laplace, *Philosophical Essay on Probabilities*, 6–7.
[20] Janus je římský bůh, který má dvě tváře.

> Na jedné straně je [Laplaceovo vnímání pravděpodobnosti] statistické, když se zabývá stochastickými zákony náhodných procesů. Na druhé straně je epistemologické, když se věnuje hodnocení rozumného stupně přesvědčení o nějakém tvrzení, a kdy zcela postrádá statistický základ.[21]

Laplace přináší do pravděpodobnosti také představy Thomase Bayese o podmíněné pravděpodobnosti a významně je rozvíjí. Odvozuje z nich například svůj princip následnosti. Ten říká, že když v posloupnosti n pokusů je s úspěšných, pak pravděpodobnost úspěchu v příštím pokusu je $\frac{s+1}{n+2}$.[22]

O pravděpodobnosti pojednával v podobném smyslu také pražský teolog, filosof a matematik italského původu Bernard Bolzano (1781–1548) ve svém spise *Lehrbuch der Religionswissenschaft* (1834) a *Wissenschaftslehre* (1837). Jeho pojetí pravděpodobnosti je blízké logickým teoriím, které posléze přinášeli filosofové v pozdějších dobách, od Wittgensteina po Carnapa. Bolzano užívá počtu pravděpodobnosti k obhajobě Písma svatého. Polemizoval s názory skotského matematika a teologa Johna Craiga (1663–1731), který užíval jakousi „historickou pravděpodobnost" založenou na svědectví. Věrohodnost pravděpodobnosti podle uvedených představ klesá se čtvercem času a vzdálenosti. Odtud Craig například odvodil, že v roce 3150 klesne víra v Písmo svaté (a v něm uvedená svědectví) na nulu.

4. Geometrická pravděpodobnost

Klasickému přístupu je v jistém smyslu podobný pohled geometrický, který je založený na porovnávání objemu, obsahu či délky geometrických útvarů. Geometrická pravděpodobnost je obdoba klasické (kombinatorické) pravděpodobnosti pro spojitý případ. Zavádí se pro případ, kdy lze všechny výsledky náhodného děje (pokusu) znázornit jako geometrický objekt Ω. Pravděpodobnost je pak podíl míry (délky, obsahu, objemu atd., značíme *vol*) části tohoto objektu odpovídající jistému jevu A a míry celého objektu Ω:

$$P(A) = \frac{vol(A)}{vol(\Omega)}$$

[21] Ian Hacking, *The Emergence of Probability: A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction and Statistical Inference* (Cambridge: Cambridge University Press, 1975), 12.

[22] Timothy Childers, *Co je pravděpodobnost? Teorie, interpretace, usuzování* (Bratislava: Aleph, 2011), 136.

Náznaky geometrického přístupu se objevují už v rukopisech Isaaca Newtona (1643–1727) a o geometrické pravděpodobnosti píše Edmond Halley (1656–1742) a Bayes. Za jednoho ze zakladatelů geometrické pravděpodobnosti je považován Georges Louis Leclerc hrabě de Buffon (1707–1788). U francouzského dvora bavil společnost hrou, při níž účastníci náhodně házeli kulatou minci na parkety s různými vzory a odhadovali, kam mince dopadnou (hra *franc-carreau*). Velice známou se stala úloha o Buffonově jehle.[23] Tyčka o délce l je náhodně házena na podlahu rozdělenou rovnoběžnými spárami vzdálenými od sebe o šířku d. Úkolem je zjistit pravděpodobnost, že tyčka protne síť rovnoběžek. Výsledek je $P(A) = \frac{2\,l}{\pi d}$. Pozornosti se této úloze dostalo zejména díky Laplaceovi. V pozdějších dobách docházelo také k využití výsledku pro numerický odhad čísla π.

Geometrickou pravděpodobností se výrazně zabýval také český matematik a fyzik Bohuslav Hostinský (1884–1951) ve spisku *Geometrické pravděpodobnosti* (1926).

S geometrickým zavedením pravděpodobnosti, zejména s uplatněním principu indiference ve spojitém případě je však třeba postupovat opatrně. Na problémy s geometrickou pravděpodobností ukazuje například tzv. paradox vína a vody.[24]

U této úlohy je známo, že v nádobě je směs vína a vody, přičemž jedné tekutiny je nejvýše třikrát tolik než té druhé. Úkolem je vyčíslit pravděpodobnost toho, že ve směsi je nejvýše dvakrát tolik vína než vody (jev A).

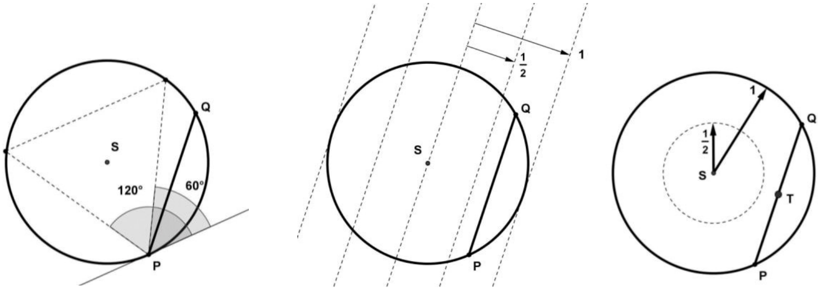
První způsob řešení (poměr voda/víno): Za náhodný element, na který užijeme princip indiference, zvolíme poměr voda/víno. Jev A je vyjádřen tím, že tento poměr je roven nejméně $\frac{1}{2}$. Možné výsledky představuje úsečka $\Omega=\left[\frac{1}{3}, 3\right]$, zkoumaný jev $A=\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ a jeho pravděpodobnost je $P(A) = \frac{3-\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{3}} = \frac{15}{16}$.

Druhý způsob řešení (poměr víno/voda): Za náhodný element zvolíme tentokrát opačný poměr víno/voda. Jev A je vyjádřen tím, že tento poměr je nejvýše roven 2. Možné výsledky představuje opět úsečka $\Omega=\left[\frac{1}{3}, 3\right]$, zkoumaný jev $A=\left[\frac{1}{3}, 2\right]$ a jeho pravděpodobnost je $P(A) = \frac{2-\frac{1}{3}}{3-\frac{1}{3}} = \frac{5}{8}$.

[23] Magdaléna Hykšová, *Filosofická pojetí pravděpodobnosti v pracích českých myslitelů* (Praha: Matfyzpress, 2011), 183–86; nebo František Mošna, *Pravděpodobnost a náhodné veličiny* (Praha: Pedagogická fakulta UK, 2017), 74.

[24] Michael Deakin, „The Wine/Water Paradox: Background, Provenance and Proposed Resolutions," *Gazette of Australian Mathematical Society* 33, no. 3 (2006): 200–205; též Jeffrey M. Mikkelson, „Dissolving the Wine/Water Paradox," *The British Journal for the Philosophy of Science* 55, no. 1 (2004): 137–45.

Vidíme, že každý způsob řešení vede k jinému výsledku. Podobné problémy jsou spojeny také s paradoxem řešení úlohy pocházející od Josepha Bertranda (1822–1900). Tato úloha se táže po pravděpodobnosti jevu A, že náhodně zvolená tětiva kružnice o poloměru 1 má délku větší než $\sqrt{3}$ (strana rovnostranného trojúhelníka vepsaného této kružnici). Řešení této úlohy vede v důsledku tří různých úvah hned ke třem různým výsledkům.[25]



Obr. 1: Tři možnosti řešení Bertrandovy úlohy.

První způsob řešení (koncové body tětivy): Jeden z bodů P tětivy PQ zvolíme pevně na kružnici a vedeme jím tečnu. Náhodně zvolené tětivy budou svírat s touto tečnou orientovaný úhel 0° až 180°, $\Omega = [0,180]$; ten volíme za náhodný element. V případě úhlu mezi 60° až 120° je tato tětiva delší než $\sqrt{3}$, A=[60,120]. Hledaná pravděpodobnost je proto $P(A) = \frac{120-60}{180-0} = \frac{1}{3}$.

Druhý způsob řešení (vzdálenost tětivy od středu S kruhu): Zvolíme pevně směr tětivy a za náhodný element uvažujeme její vzdálenost od středu S kružnice. Tato vzdálenost je maximálně 1 na obě strany $\Omega=[-1,1]$. Tětiva je delší než $\sqrt{3}$ pro vzdálenosti do $\frac{1}{2}$ na obě strany $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Hledaná pravděpodobnost je tedy $P(A) = \frac{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$.

Třetí způsob řešení (poloha středu tětivy T): Za náhodný element budeme uvažovat polohu středu T hledané tětivy v daném kruhu, Ω je celý kruh. Příslušná tětiva bude delší než $\sqrt{3}$, pokud bude její střed ležet uvnitř kružnice se středem S o poloměru $\frac{1}{2}$, A je kruh o poloměru $\frac{1}{2}$. Hledanou

[25] Joseph Bertrand, *Calcul des probabilités* (Paris: Gauthier–Villars, 1889); též Anděl, *Matematika náhody*, 20–22; nebo Childers, *Co je pravděpodobnost?*, 141–43.

pravděpodobnost pak vypočítáme jako poměr obsahů této menší kružnice a celé kružnice, což je $P(A) = \frac{\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi \cdot 1^2} = \frac{1}{4}$.

Při způsobech řešení Bertrandovy úlohy je tedy rozhodující, na který náhodný element užijeme princip indiference. Jednotlivé způsoby volby tětivy nejsou rovnocenné, vedou k jinému rozdělení na množině přímek v rovině, a tedy přinášejí různé číselné odpovědi na naši otázku.

5. Axiomatický systém a interpretace pravděpodobnosti

V průběhu 19. století krystalizují základní vlastnosti pravděpodobnosti, jako je pravidlo o sčítání neboli konečná (spočetná) aditivita a vztah pro podmíněnou pravděpodobnost $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$. Koncem století se projevuje výrazná snaha o axiomatizaci jednotlivých částí matematiky. David Hilbert (1862–1943) v roce 1900 formuloval 23 otevřených problémů, které je v matematice třeba vyřešit, tzv. Hilbertovy problémy. Mezi nimi se objevuje také snaha o ukotvení axiomatických základů pravděpodobnosti. Vyřešení tohoto problému přinesl roku 1933 ruský matematik Andrej N. Kolmogorov (1903–1987), když definoval pravděpodobnost (ve spisu *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie)* jako normovanou míru.[26] Kolmogorov zavedl pro neprázdnou množinu výsledků Ω systém jejích podmnožin S uzavřený na spočetné sjednocení, množinové rozdíly (tím i na spočetné průniky) a obsahující Ω; takovému systému říkáme σ-algebra. Na tomto systému pak zavedl míru (tedy množinovou funkci): $S \to [0, \infty)$, která je

- nezáporná,
- normovaná, tj. $P(\Omega)=1$,
- σ-aditivní, tj. taková, že pro spočetně mnoho podmnožin $A_1, A_2 \ldots \in S$ po dvou disjunktních platí
$$P(\cup A_k) = \sum P(A_k)\,.$$

Tyto axiomy znamenaly pro koncept pravděpodobnosti z matematického hlediska jakýsi základ, od něhož se následně začala bouřlivě rozvíjet teorie pravděpodobnosti. Současně se vynořilo množství otázek týkajících se významu, interpretace a užití pojmu pravděpodobnost. Od počátku 20. století dochází k různým pokusům, jak pravděpodobnost uchopit ve filosofickém smyslu.

[26] Andrej N. Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability* (New York: Chelsea, 1950).

Jak jsme již zmínili v úvodu, pravděpodobnost lze chápat zhruba dvojím způsobem – v rámci interpretace náhodnosti buď ontologické (objektivistické, fyzikální), nebo epistemologické. Ontologické pojetí chápe pravděpodobnost jako vlastnost okolního světa, která je na člověku a lidském vědomí nezávislá, existovala před vznikem lidstva a bude existovat i po jeho zániku. Pravděpodobnost takto pojatá je neoddělitelně a bytostně spjata s fyzikální podstatou jsoucna. Naopak epistemologická interpretace spojuje pravděpodobnost s lidskou znalostí nebo vírou. Nejistota je podle tohoto pojetí považována za nedostatek lidského poznání, bez člověka by nebylo pravděpodobnosti. Epistemologický pohled umožňuje chápat pravděpodobnost jako vlastnost našich znalostí a uvažování či míru našeho přesvědčení.

V každém z uvedených dvou směrů (ontologický a epistemologický) rozlišujeme několik základních interpretací pravděpodobnosti. Názorů na rozdělení pojetí pravděpodobnosti je však více, každé „škatulkování" je vždy problematické, neúplné a nepřesné.

Pozornost obrátíme nejprve k epistemologickému pojetí pravděpodobnosti, kde existují v podstatě dvě interpretace – logická a subjektivní. Hlavní odlišnost mezi logickou a subjektivní interpretací pravděpodobnosti spočívá v následujícím rozdílu. Logické pojetí chápe pravděpodobnost jako logické vztahy mezi tvrzeními, které jsou platné pro všechny vnímající subjekty. Jestliže o pravděpodobnosti jistého jevu budou uvažovat dvě různé myslící bytosti, dojdou zákonitě ke stejnému výsledku. Naopak pro subjektivní pojetí je pravděpodobnost pouhá míra přesvědčení jednotlivce, pouhý stupeň důvěry. Dvě různé myslící bytosti mohou v tomto případě dojít ke dvěma různým hodnotám pravděpodobnosti.

6. Logické interpretace

Logické pojetí pravděpodobnosti představuje pokus o rozšíření postupů deduktivní logiky. Podle logické interpretace pravděpodobnost na základě symetrie a obecných okolností logicky odhaduje, jaká je naděje, že nějaká událost nastane. Zastánci této teorie považují pravděpodobnost za míru racionálního přesvědčení.

Walter Dubislav (1895–1937) poukázal v roce 1929 na to, že se základy podobné interpretace pravděpodobnosti (jakožto míry jistoty) přišel už Bernard Bolzano. Kořeny logického pojetí pravděpodobnosti můžeme hledat také u Leibnize, jehož disertační práce roku 1666 obsahuje mimo jiné úvahy o kombinatorice. V bakalářské práci *Disputatio juridica de conditiobus* (1665) se zabýval podmínečným právem a „částečným vyplýváním". Kromě četné korespondence s Bernoullim a dalšími matematiky se úvahy o „stupních pravděpodobnosti" vyskytují také v jeho spise *Neue Versuche* über *den menschlichen Verstand* (1703). Významným způsobem přispěl ke zkoumání pravděpodobnosti britský matematik George Boole (1815–1864). Pravděpodobnost chápe ve shodě s logickým pojetím jako očekávání založené na částečné znalosti. Úvahám o pravděpodobnosti věnoval podstatnou část svého stěžejního díla *An Investigation of the Laws of Thought on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* (1854).

Logická interpretace pravděpodobnosti se utvářela zejména ve dvou centrech. První z nich představovala Cambridge v době vlády Edwarda VII. Zde se setkáváme se jmény jako Bertrand Russell (1872–1970), George E. Moore (1873–1958), William E. Johnson (1858–1931), John M. Keynes (1883–1946), Harold Jeffreys (1891–1989). Později se začala formovat skupina rozvíjející logické pojetí v tzv. vídeňském kruhu. K oběma místům měl blízko rakouský filosof Ludwig Wittgenstein (1889–1951).

Mezi zakladatele logického pojetí pravděpodobnosti se v Cambridge řadí logik, filosof a ekonom William Ernest Johnson. Ve svém pojednání „Probability: The Relations of Proposal to Supposal" (1932) zastává mínění, že pravděpodobnost nelze přiřadit jevu, ale že jde v podstatě o charakteristiku logického vztahu mezi tvrzeními udávajícími „míru vyplývání". Johnson píše:

> Pravděpodobnost je vlastnost či proměnná, co do kvantity či stupně, kterou je možné přisoudit tvrzení ve vztahu k nějakému jinému tvrzení.[27]

Významný pokus o využití logických principů při definici pravděpodobnosti představuje pojetí ekonoma a matematika Johna Maynarda Keynese v díle *A Treatise on Probability* (1921). Pravděpodobnost je zde charakterizována jako stupeň rozumného přesvědčení:

> teorie pravděpodobnosti [je] logická, […] protože se zabývá stupněm přesvědčení, které je za daných podmínek rozumné zastávat, a ne pouze okamžitými přesvědčeními jednotlivců, které mohou nebo nemusí být rozumné.[28]

Za přímého Keynesova učitele a předchůdce lze považovat již zmíněného W. E. Johnsona, jenž přednášel na Cambridge logiku (jeho kolegou zde byl také Keynesův otec John Neville Keynes). Keynesův přístup k pravděpodob-

[27] William E. Johnson, „Probability: The Relations of Proposal to Supposal," *Mind* 41, no. 161 (1932): 1–16.
[28] Keynes, *Treatise on Probability*, 4.

nosti vychází z přesvědčení, že běžnou teorii „odvozování“, kterou užíváme v deduktivní logice, lze rozšířit na logickou teorii „částečného odvozování“:

> Obecně přijímáme možnost rozhodnout o tom, že nějaký závěr vyplývá z předpokladů. Vzhledem k tomu nejde tedy o velké zobecnění, když usuzujeme, že nějaký závěr částečně vyplývá z předpokladu nebo je k němu v jistém pravděpodobnostním vztahu.[29]

Snahy postavit matematiku na nějaký pevný základ vedly Russela a také Gottloba Fregeho (1848–1925) k pokusům hledat takovou bázi v logice. Gillies uvádí:

> Šlo o pokus omezit matematiku na logiku ve smyslu vytvoření formálního axiomatického deduktivního systému, jehož axiomy by byly zřejmými pravdami logiky a uvnitř kterého by bylo možné prokázat jakoukoli matematickou větu.[30]

Keynesovu práci na logickém pojetí pravděpodobnosti je třeba chápat v tomto kontextu. Usiluje o to, aby základy pravděpodobnosti byly vystavěny na několika axiomech podobně jako v logice. Keynes upřesňuje princip indiference:

> Princip indiference říká, že pokud pro výsledky z několika alternativ není znám žádný důvod pro upřednostnění jednoho výsledku před jinými, pak vzhledem k těmto znalostem má tvrzení o každé z těchto alternativ stejnou pravděpodobnost. [31]

Pravděpodobnost je podle Keynese druh částečného odvozování a jedním z bezprostředních důsledků tohoto přístupu je to, že všechny pravděpodobnosti považuje za podmíněné. Keynes v tomto smyslu uvádí:

> Žádné tvrzení není samo o sobě pravděpodobné ani nepravděpodobné, stejně jako žádné místo nemůže být ve své podstatě vzdálené; a pravděpodobnost nějakého tvrzení se liší podle původních evidencí, podobně jako pro vzdálenost je třeba mít počátek souřadnic.[32]

V Keynesově, podobně jako v Laplaceově, pojetí jsou pravděpodobnosti vlastnostmi objektů v platonském smyslu.

[29] Ibid., 52.
[30] Gillies, *Philosophical Theories of Probability*, 26–27.
[31] Keynes, *Treatise on Probability*, 42.
[32] Ibid., 7.

V roce 1911 přijel do Cambridge k Russellovi studovat Ludwig Wittgenstein. Ve svém slavném díle *Tractatus Logico-Philosophicus* (1922) ukazuje, že často kladené filosofické otázky vlastně pozbývají smyslu a bývají jen důsledkem nepochopení logiky jazyka. Kromě mnoha zcela zásadních úvah tento spisek obsahuje též náčrt logické teorie pravděpodobnosti. Wittgenstein se držel v Cambridge spíše stranou a později se neúčastnil ani setkávání Vídeňského kruhu. Přesto byl oběma skupinami ovlivňován a tu druhou také výrazně ovlivnil. V jeho díle lze vysledovat vliv německého psychologa Johanna von Kriese (1853–1928), u něhož nacházíme kořeny podobného pojetí pravděpodobnosti. Ten za základ pravděpodobnosti považuje jakýsi herní či volný prostor, jakési počáteční polohy. Kries studuje empiricky možný svět, zatímco Wittgenstein logicky možný svět.

Také anglický matematik, astronom a geofyzik Harold Jeffreys se svým dílem *Theory of Probability* (1939) v jistém smyslu hlásí k logické pravděpodobnosti.

Druhým myšlenkovým centrem podporujícím logický koncept pravděpodobnosti se stal tzv. vídeňský kruh. Již před 1. světovou válkou se scházeli jeho zakladatelé matematik Hans Hahn (1879–1934), filosof Victor Kraft (1880–1975), filosof a fyzik Moritz Schlick (1882–1936). Po válce se k nim přidávali Rudolph Carnap (1891–1970), filosof Otto Neurath (1882–1945), fyzik Philipp Frank (1884–1966), Friedrich Waismann (1896–1959), matematik Kurt Reidemeister (1893–1971), filosof a fyzik Herbert Feigl (1902–1988), matematici Karl Menger (1902–1985) a Kurt Gödel (1906–1978) a další. Toto společenství se od roku 1922 scházelo každý druhý čtvrtek a jeho vůdčím duchem se stal M. Schlick. Ve shodě s Wittgensteinovým *Traktátem* se skupina hlásila k logickému pozitivismu, zabývala se zejména teorií a logikou vědy a odmítala veškerou metafyziku. Vídeňský kruh se otevřel světu zejména vystoupením na Konferenci o teorii poznání a exaktních vědách konané 15.–17. 9. 1929 v Praze. Základní témata konference se týkala pravděpodobnosti a kauzality, základů matematiky a logiky, předsedal jí P. Frank. Později s nástupem nacismu byli členové tohoto společenství nuceni emigrovat a přenášeli svá působiště do Anglie a USA.

Jistý posun ve vývoji logického pojetí pravděpodobnosti přinesli rakouský matematik, fyzik a filosof Friedrich Waismann a zejména německý filosof a logik Rudolph Carnap. Ve svém hlavním díle *Logical Foundation of Probabilities* (1950) provedl výrazný pokus o zavedení pravděpodobnosti pouze na základě logických pravidel a pravděpodobnost tak redukoval na pouhý předmět induktivní logiky. Logická analýza se pro něho stala metodou pro stanovení pravděpodobnosti a tímto nástrojem se pokusil hledat její nejlepší odhady. Pokusil se položit nové základy induktivní pravděpodobnostní logiky, kterou definoval jakožto pravděpodobnostní míru. Rozlišoval tuto pravděpodobnost chápanou jako objekt induktivní logiky a pravděpodobnost v jejím četnostním smyslu a snažil se mezi oběma pojmy hledat souvislosti. Později v knize *The Continuum of Inductive Methods* (1952) zavedl a zkoumal celý systém induktivních metod a hledal mezi nimi nejvhodnější pravděpodobnostní míru. Práce na projektu logické pravděpodobnosti v tomto smyslu pokračovaly až do 70. let 20. století.

K rozvoji logického pojetí pravděpodobnosti přispěl také český matematik a statistik Otomar Pankraz (1903–1976) svými spisky *O axiomech pravděpodobnosti* (1939) a *O pojmu pravděpodobnosti* (1940).[33]

V sedmdesátých letech 20. století přišel americký fyzik Edwin T. Jaynes (1922–1998) s novým pojetím pravděpodobnosti odpovídajícím fyzikálním úvahám. Východiskem jeho zavedení pravděpodobnosti se stala teorie informace a tzv. princip maximální entropie. Jaynes vychází ze statistické fyziky, kterou vyložil z pohledu teorie informace a rozvinul v ní svoji metodu hledání maximální entropie. Tento princip aplikoval a rozpracoval z obecnějšího hlediska na teorii pravděpodobnosti. Jaynes vystavěl pravděpodobnost jako jakousi zobecněnou logiku, přičemž vycházel ze součtového a součinového (bayesovského) pravidla a pracoval s pojmem podmíněné pravděpodobnosti.

Podle Jaynese záleží na popisu celé situace a základem je najít správné parametry. Příslušný popis nesmí být ani poddeterminovaný ani předeterminovaný. Jaynes zdůrazňoval, že nejprve je třeba nalézt symetrie a pak teprve pravděpodobnosti. Pro základní rozdělení jde o poměrně jednoduché úvahy, ale v situacích se spojitými případy lze opět narazit na problémy.

Za jistý úspěch Jaynesova pojetí pravděpodobnosti lze považovat jeho možné vyřešení Bertrandova paradoxu.[34] Výše uvedená řešení aplikovala princip indiference na tři elementy náhodnosti (poloha koncových bodů, vzdálenost tětivy od středu kruhu a poloha středu tětivy). Jaynes se inspiroval metodou, kterou často užívají fyzici při hledání rovnic. Při řešení problémů hledají popisy, které jsou invariantní vůči transformacím posunutí a otočení, případně při změně měřítka.[35] Jaynes dospěl k závěru, že správný je druhý způsob řešení, protože jemu odpovídající popis je invariantní vůči těmto třem transformacím (u prvního a třetího způsobu řešení není

[33] Hykšová, *Filosofická pojetí pravděpodobnosti*, 221–30.

[34] Childers, *Co je pravděpodobnost?*, 159–60.

[35] Invariance vůči posunutí a otočení bývá někdy ve fyzice nazývána principem objektivity.

náhodný element invariantní vůči posunutí a u prvního způsobu navíc ani vůči změně měřítka).[36]

Shackel rozlišuje zhruba dva přístupy pokusů o řešení Bertrandova paradoxu.[37] První z nich je založen na přesvědčení, že úloha (tak jak je zadána) je podurčená (poddeterminována), neboť zde není dostatečně formulováno, jak má být ona náhodnost volby tětivy realizována. Až když je přesně popsán způsob dosažení náhodnosti, lze zvolit odpovídající náhodný element a na něj uplatnit princip indiference. Navíc existují i způsoby řešení, které nevyužívají princip indiference.

V tomto smyslu uvažují o Bertandově úloze van Fraassen,[38] Marinoff[39] nebo například Dvořák a Snětinová.[40] Podobný přístup nalézáme také v knize M. Hejného, kde je tato úloha patrně omylem nazvána Bernoulliova.[41] Druhý přístup považuje Bertrandovu úlohu za dobře určenou (ani poddeterminovanou ani předeterminovanou) a aplikuje metody, které by poskytly vhodné rozdělení pravděpodobnosti a prokázaly jeho správnost. Jak jsme již uvedli, tento způsob řešení zastával právě Jaynes. Rowbottom vznáší pochyby týkající se Jaynesova řešení tohoto paradoxu a uvádí několik dalších způsobů řešení.[42] Drory dokonce tvrdí, že Jaynesův princip invariance vůči transformacím lze aplikovat nejen na druhý způsob řešení, ale stejně dobře také na ostatní dva způsoby.[43] Domnívá se, že také v Jaynesově řešení je předem proveden jakýsi implicitní výklad způsobu pojetí náhodnosti. Aerts a Sassoli de Bianchi soudí, že pro vyřešení Bertrandovy úlohy je potřeba obou přístupů, nejprve je nutné jednoznačně formulovat, v čem spočívá náhodnost popsaného děje a následně na problém užít vhodné metody ve smyslu Jaynesově.[44]

[36] Pro lepší pochopení těchto úvah doporučujeme samotný článek: Edwin T. Jaynes, „The Well-Posed Problem," *Foundations of Physics* 4, no. 3 (1973): 477–93.

[37] Nicholas Shackel, „Bertrand's Paradox and the Principle of Indifference," *Philosophy of Science* 74, no. 2 (2007): 150–75.

[38] Bas C. Van Fraassen, *Laws and Symmetry* (Oxford: Clarendon Press, 1989).

[39] Louis Marinoff, „A Resolution of Bertrand's Paradox," *Philosophy of Science* 61, no. 1 (1994): 1–24.

[40] Jiří Dvořák a Marie Snětinová, „Bertrandův paradox aneb není náhoda jako náhoda," *Rozhledy matematicko-fyzikální* 94, č. 2 (2019): 12–17.

[41] Milan Hejný et al., *Teória vyučovania matematiky 2* (Bratislava, SPN, 1989), 483.

[42] Darrell P. Rowbottom, „Bertrand's Paradox Revisited: Why Bertrand's ‚Solutions' Are All Inapplicable," *Philosophia Mathematica* 21, no. 1 (2013): 110–14.

[43] Alon Drory, „Failure and Uses of Jaynes' Principle of Transformation Groups," *Foundations of Physics* 45, no. 4 (2015): 439–60.

[44] Diederik Aerts and Massimiliano Sassoli de Bianchi, „Solving the Hard Problem of Bertrand's Paradox," *Journal of Mathematical Physics* 55 (2014): 083503.

Přestože logické pojetí pravděpodobnosti ve smyslu Keynessově či Carnapově se dále nerozvíjí, diskuse kolem Jaynesových úvah dodnes představují živou větev logického pojetí pravděpodobnosti.[45]

7. Subjektivní interpretace

Subjektivní pojetí zdůrazňuje, že pravděpodobnost je pouze ochota jednotlivce věřit, že jistý jev nastane nebo ne. Míra této víry se nejčastěji realizuje prostřednictvím koherentních sázek. Subjektivní teorii pravděpodobnosti rozvinuli především dva myslitelé, Frank P. Ramsey (1903–1930) a Bruno de Finetti (1906–1985).

Ramsey zpochybňuje klasický či logický koncept pravděpodobnosti a pravděpodobnost je pro ně pouhou logikou částečného přesvědčení či důvěry (*partial belief*). Metoda jejího měření je psychologická a její počítání se provádí na základě sázkového systému. Každý člověk je v odlišné míře přesvědčen o nějakém výroku či skutečnosti. Ramsey říká:

> Především přijímáme skutečnost, že míra přesvědčení je něco, co dotyčný vnímá; a že toto přesvědčení se liší v intenzitě pocitu, který ho doprovází, což lze nazvat vírou nebo pocitem přesvědčení.[46]

Ramsey si je vědom toho, že sázení, na kterém zakládá svoji teorii, představuje pouze jednu z činností, v níž se projevuje míra přesvědčení či víry. Hájí svůj přístup následovně:

> úvahy v tomto oddílu [...] se zásadně odvíjí od sázení, což se nezdá nerozumné, když si uvědomíme, že celý náš život je v jistém smyslu založen na sázení. Kdykoli jdeme na zastávku, sázíme na to, že vlak pojede, kdybychom o tom nebyli dostatečné přesvědčeni, raději bychom tuto sázku vzdali a zůstali doma.[47]

De Finetti vyšel z logiky Cesara Burali-Fortiho (1861–1931) a pozitivistické kritiky empirického vnímání světa Ernsta Macha (1838–1916). Odmítá základní racionalistická dogmata ve prospěch relativistického a dokonce iracionálního pojetí, když píše:

[45] Childers, *Co je pravděpodobnost?*, 172.
[46] Frank P. Ramsey, „Truth and Probability," in *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, ed. Richard B. Braithwaite (London: Kegan Paul, Trench, Trübner, 1931), 156–98.
[47] Ibid., 183.

> subjektivní teorie pravděpodobnosti [je] příklad aplikace relativistického přístupu na stále důležitější odvětví moderní matematiky jakým je počet pravděpodobnosti, již vnímáme jako nezbytnou součást nové vize vědy, které chceme vtisknout iracionální pravděpodobnostní formu.[48]

De Finetti tvrdil, že nemá smysl ptát se, jaká je pravděpodobnost nějakého jevu sama o sobě, že pravděpodobnost je vždy subjektivní a závisí výhradně na osobě, která ji udává. Mezi jeho provokativní výroky patří, když o pravděpodobnosti prohlašuje, že jako taková neexistuje.[49]

Zastánci subjektivního pojetí pravděpodobnosti považují determinismus jen za stav naší mysli, který se pokoušíme přírodě vnutit. Podle nich „pravděpodobnosti jsou stavy mysli, nikoli stavy přírody." Vědecké zákony nejsou hypotézy o možných stavech přírody, ale hypotézy o našich názorech na ni. Hlavní myšlenka tohoto pojetí pravděpodobnosti je vyjádřena požadavkem: „Nemáme hledat pravdu, ale poznání o svém vlastním názoru. Nemáme klást otázky přírodě, ale svému svědomí."[50]

Také William F. Donkin (1914–1969) považuje pravděpodobnost za stupeň důvěry a mezi zastánce subjektivního pojetí pravděpodobnosti se řadí také americký matematik Leonard J. Savage (1917–1971). Jakousi subjektivní interpretaci zastával dlouho před Ramseyem či de Finettim český katolický kněz Václav Šimerka (1819–1887) ve spisku *Síla přesvědčení* z roku 1882.

8. Četnostní interpretace

Nyní obrátíme pozornost k ontologickému pojetí pravděpodobnosti, kde existují dvě interpretace–četnostní a propenzitní.

Četnostní (nebo frekvenční) interpretace považuje pravděpodobnost jevu za limitu relativní četnosti výskytu tohoto jevu v dlouhé sérii opakovaných pokusů. Původ četnostního pojetí pravděpodobnosti nalézáme ve druhé polovině 19. století opět na Cambridge. Mezi zastánce tohoto pojetí se řadí matematici John Venn (1834–1923) se svým dílem *The Logic of Chance* (1866) a irský filosof a ekonom Francis Ysidro Edgeworth (1845–1926). Druhým významným centrem této teorie se stal středoevropský prostor. Základní myšlenky frekvenčního pojetí lze spatřovat u fyzika Gustava T. Fechnera (1801–1887) nebo Georga F. Helma (1851–1923).

[48] Bruno de Finetti, „Probabilism," *Erkenntnis* 31 (1989): 169–223.
[49] Saxl, „Filosofické interpretace pravděpodobnosti," 141.
[50] Ibid., 142.

Nejvýraznějším představitelem četnostní interpretace pravděpodobnosti je bezesporu rakouský matematik Richard von Mises (1883–1953). Základy své teorie představuje nejprve časopisecky v roce 1919 a později v knize *Probability, Statistics and Truth* (1928). Po jeho smrti vdova Hilda Geiringerová sestavila z jeho článků souborné dílo *Mathematical Theory of Probability and Statistics* (1964), které shrnuje dřívější i pozdější jeho myšlenky. Richard von Mises osvětluje, v čem jeho přístup spočívá: „stejně jako předmětem geometrie je studium prostorových jevů, tak se teorie pravděpodobnosti zabývá hromadnými jevy a opakujícími se událostmi.“[51]

Jeho teorie vychází ze stability relativních četností náhodných jevů při mnohonásobném opakování pokusů. Von Mises zamýšlel svou teorii jako teorii hromadných jevů.[52] Von Mises vychází z poměru četností pokusů, kdy nastane jev A a všech pokusů. Zavádí výběrový prostor nebo tzv. příznakový prostor (*Merkmalraum*). Dále uvažuje nekonečnou posloupnost náhodných pokusů a jejich výsledků a nazývá je kolektiv (*Kollektive*). Kolektiv je pro něho posloupnost událostí nebo procesů stejné povahy, které se liší určitými pozorovatelnými vlastnostmi jako barva, číslo nebo cokoli jiného.[53] Z tohoto kolektivu vybíráme podposloupnosti. Von Mises uvažuje ve své definici dva principy. Předpokládá u celého kolektivu existenci limity – princip konvergence. Dále požaduje, aby při výběru podposloupnosti neexistoval tzv. herní systém – princip náhodnosti nebo nerovnoměrnosti. Způsob takového vybírání členů podposloupnosti se uskutečňuje pomocí jisté funkce, nazývané výběrová funkce, a jsou na ni kladeny různé nároky. Základní požadavek na tuto funkci je, aby výběr členu nezávisel na tom, jaká je jeho hodnota, Alonzo Church (1903–1995) dále omezuje výběr pouze na rekurzivní výběrové funkce, Kolmogorov požaduje jakousi nekomprimovatelnost předpisu takových funkcí a jiní matematici přicházejí s dalšími požadavky. Pravděpodobnost je pak definována jako limita relativní četnosti vybraných posloupností, kde $m(A)$ je četnost výskytů jevu A v n pokusech:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m(A)}{n}$$

Četnostní interpretace byla přijímána a prosazována britskou statistickou školou. Na ní založené principy statistických metod a šetření dobře souhlasí s praxí. Významným přínosem úvah kolem této definice pro budoucí

[51] Richard von Mises, *Probability, Statistics and Truth* (London: Allen, Unwin, 1961), vii.
[52] Childers, *Co je pravděpodobnost?*, 24.
[53] von Mises, *Probability, Statistics and Truth*, 12.

generace je také nastolení otázky náhodnosti a toho, jak ji chápat na základě vlastností výběrové funkce.[54]

Někteří myslitelé navrhovali jisté úpravy von Misesovy definice, například Hans Reichenbach (1891–1953). Četnostní interpretace však bývá často napadána a kritizována ve svých principech, což je vzhledem k jejímu zavedení poměrně snadné. Jedním z jejích slabých míst je užívání nekonečných kolektivů, přičemž v praxi jsme schopni pracovat pouze s konečnými posloupnostmi. Někteří matematici tuto definici hodnotí jako empiricky prázdnou s odkazem na to, že při hledání limity posloupnosti na jejích konečných podposloupnostech vlastně vůbec nezáleží, což nelze popřít. Další nedostatečnost tohoto pojetí je možné spatřovat v tom, že nedokáže nic říci o pravděpodobnosti jednotlivého případu. Von Mises píše:

> nelze vypovědět nic o pravděpodobnosti úmrtí konkrétní osoby, a to ani tehdy, kdy dopodrobna známe jeho životní podmínky a zdravotní stav. Fráze „pravděpodobnost úmrtí" s ohledem na jednotlivé osoby nemá pro nás žádný význam.[55]

9. Propenzitní interpetace

Propenzitní interpretace pravděpodobnosti se pokouší postihnout objektivní náhodné rysy vnějšího světa. Propenzita znamená jakýsi sklon situace přejít v jistý důsledek, jakýsi druh dispozice produkovat posloupnost dějů s charakteristickou četností, nějaká vnitřní daná vlastnost, která se náhodně projevuje navenek. Propenzity nejsou obsaženy v objektu, jsou obsaženy v situaci. Typickým předobrazem této interpretace je poločas rozpadu chemického prvku nebo transformace DNA.

Od četnostní k něčemu jako propenzitní interpretaci přecházeli postupně Charles Sanders Peirce (1839–1914) a Antoine Augustin Cournot (1801–1877). Také Karl R. Popper (1902–1994) původně zastával frekvenční teorii, postupně ale docházel k názoru, že tato teorie je nedostatečná zejména s ohledem na kvantovou fyziku. Jako cíl si položil dva zásadní úkoly: indeterministickou reinterpretaci Einsteinovy deterministické teorie a objektivistickou a realistickou reinterpretaci kvantové teorie. To ho vedlo k hledání jiného objektivního pojetí pravděpodobnosti – k teorii propenzit. Popper propenzity chápe velmi široce, jako jisté metafyzické síly nebo jako součást fyzikální reality. Jeho nový koncept pravděpodobnosti převzalo a rozvinulo

[54] Childers, *Co je pravděpodobnost?*, 30.
[55] von Mises, *Probability, Statistics and Truth*, 12.

různými směry mnoho vědců a filosofů. Existuje celá řada pojetí, které lze shrnout jako propenzitní teorie. Miller píše:

> Jednou z hlavních výzev, kterým musí čelit jakákoli objektivistická teorie vědeckých poznatků, je poskytnutí uspokojivého pochopení fyzikálních pravděpodobností. Nejstarší myšlenky, souhrnně známé jako frekvenční interpretace pravděpodobnosti, byly zcela opuštěny a nahrazeny stejně rozptýleným souborem návrhů, které se všechny nazývají propenzitní interpretací pravděpodobnosti.[56]

Propenzitní interpretace se zdá být velice intuitivní.[57] Potýká se však s mnoha závažnými problémy. Jedním z nich je například Humhreysův paradox. Ve svém spisku *A World of Propensities* (1990) vyslovil Popper myšlenku, že pojem propenzity by mohl být zobecněním pojmu příčina: „Příčinnost je jen zvláštní případ propenzity: případ propenzity rovné jedničce."[58]

Pokud jsou propenzity v tomto smyslu chápány kauzálně, přináší to jistý problém. Při výpočtech podmíněných pravděpodobností jsme schopni ze znalosti podmíněné pravděpodobnosti $P(A/B)$ získat podle Bayesova vzorce také podmíněnou pravděpodobnost $P(B/A)$. Jakýkoli případ podmíněné pravděpodobnosti (*A* za podmínky *B*) tedy vede ke zpětné příčinné vazbě (*B* za podmínky *A*). Princip kauzality však funguje pouze od příčiny k důsledku. Humphreys dochází k závěru, že identifikace propenzit a pravděpodobností je tím významně zpochybněna.[59]

Propenzity dosud nejsou v terminologii teorií pravděpodobnosti dostatečně zavedeny. Je třeba se zabývat jejich vymezením, vlastnostmi a v jakém smyslu je možné je chápat jako pravděpodobnosti.

10. Závěr

Otázka rozvoje poznatků o pravděpodobnosti není ani zdaleka uzavřená. Leonard J. Savage uvádí ve své knize *The Foundations of Statistics* (1974) následující přirovnání: „pokud se jedná o to, co je pravděpodobnost a jak

[56] David W. Miller, *Critical Rationalism. A Restatement and Defence* (Chicago: Open Court, 1994), 175.
[57] Childers, *Co je pravděpodobnost?*, 51.
[58] Karl R. Popper, *A World of Propensities* (Bristol: Thoemmes, 1990), 20.
[59] Paul Humphreys, „Why Propensities Cannot Be Probabilities," *The Philosophical Review* 94, no. 4 (1985): 557–70.

souvisí se statistikou, pak zřídkakdy od stavby Babylonské věže panoval v něčem tak dokonalý nesoulad názorů.“[60]

Gregory Bateson (1904–1980) říká: „Dva popisy jsou lepší než jeden.”[61] Mnoho autorů (například Keynes nebo von Mises) zastávalo jakýsi monistický pohled, když tvrdili, že jejich interpretace pravděpodobnosti se vztahuje na všechna užití tohoto pojmu. Někteří filosofové však připouštějí více interpretací pravděpodobnosti podle oblasti či kontextu. Například Ramsey spatřuje význam četnostního pojetí pro fyzikální jevy a vedle toho také pojetí částečného subjektivního přesvědčení. Carnap přiznává smysl logické a vedle ní i četnostní interpretace. Propenzitní interpretace bývá také často přijímána pro vědecké účely, vedle toho subjektivní bayesovské pojetí se využívá pro zachycení nejistoty při nějaké předběžné znalosti. Wesley C. Salmon (1925–2001) klade ve své práci *The Foundations of Scientific Inference* (1967) na pojetí a definice pravděpodobnosti tři zásadní kritéria: přijatelnost, ověřitelnost a použitelnost.[62]

Všechny interpretace pravděpodobnosti mají bezesporu svá opodstatnění, výhody, přednosti, nedostatky a problémy. Nějaká forma propenzitní pravděpodobnosti může být vnímána jako ta základní, logická interpretace jako snaha o její racionální uchopení, subjektivní jako její přijetí vůlí a statistická metoda jako způsob jejího empirického zjišťování.

Bibliografie:

Aerts, Diederik, and Massimiliano Sassoli de Bianchi. „Solving the Hard Problem of Bertrand’s Paradox.“ *Journal of Mathematical Physics* 55 (2014): 083503. https://doi.org/10.1063/1.4890291.

Anděl, Jiří. *Matematika náhody*. Praha: Matfyzpress, 2003.

Bernoulli, Jacob. *Ars conjectandi*. Basel: Thurnisiorum Fratrum, 1713.

Bertrand, Joseph. *Calcul des probabilités*. Paris: Gauthier – Villars, 1889.

Coufal, Jan. „Alea iacta est aneb půl tisíciletí od vytištění úlohy rytíře de Mére.“ *Informační bulletin České statistické společnosti* 5, č. 1, 2 (1994): 10–18; 3–10.

Daston, Lorraine. *Classical Probability in the Enlightenment*. Princeton: Princeton University Press, 1988. https://doi.org/10.1515/9781400844227.

[60] Saxl, „Filosofické interpretace pravděpodobnosti,“ 152.
[61] Zdeněk Pinc, *Fragmenty k filosofii výchovy* (Praha: Oikoymenh, 2000), 92.
[62] Saxl, „Filosofické interpretace pravděpodobnosti,“ 153.

Deakin, Michael. „The Wine/Water Paradox: Background, Provenance and Proposed Resolutions.“ *Gazette of the Australian Mathematical Society* 33, no. 3 (2006): 200–205.

Drory, Alon. „Failure and Uses of Jaynes’ Principle of Transformation Groups.“ *Foundations of Physics* 45, no. 4 (2015): 439–60. https://doi.org/10.1007/s10701-015-9876-7.

Dvořák, Jiří a Marie Snětinová. „Bertrandův paradox aneb není náhoda jako náhoda.“ *Rozhledy matematicko-fyzikální* 94, č. 2 (2019): 12–17.

de Finetti, Bruno. „Probabilism.“ *Erkenntnis* 31 (1989): 169–223. https://doi.org/10.1007/bf01236563. Původně „Probabilismo,“ *Logos* 14 (1931): 163–219.

Gamerman, Dani, and Hedibert F. Lopes. *Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference*, 2nd edition. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2006. https://doi.org/10.1201/9781482296426.

Gillies, Donald. *Philosophical Theories of Probability*. London: Routledge, 2000.

Hacking, Ian. *The Emergence of Probability: A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction and Statistical Inference*. Cambridge: Cambridge University Press, 1975.

Hejný, Milan a kol. *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN, 1989.

Humphreys, Paul. „Why Propensities Cannot be Probabilities.“ *The Philosophical Review* 94, no. 4 (1985): 557–70. https://doi.org/10.2307/2185246.

Hykšová, Magdaléna. *Filosofická pojetí pravděpodobnosti v pracích českých myslitelů*. Praha: Matfyzpress, 2011.

Childers, Timothy. *Co je pravděpodobnost? Teorie, interpretace, usuzování*. Bratislava: Aleph, 2011.

Jaynes, Edwin T. „The Well-Posed Problem.“ *Foundations of Physics* 4, no. 3 (1973): 477–93. https://doi.org/10.1007/bf00709116.

Johnson, William E. „Probability: The Relations of Proposal to Supposal.“ *Mind* 41, no. 161 (1932): 1–16. https://doi.org/10.1093/mind/XLI.161.1.

Kalina, Jan a Lubomír Soukup. „Doktrína šancí: 300. výročí první učebnice teorie pravděpodobnosti.“ *Informační bulletin České statistické společnosti* 29, č. 1 (2018): 1–11.

Keynes, John Maynard. *A Treatise on Probability*. New York: Macmillan, 1963. Původně London: Macmillan, 1921.

Kolmogorov, Andrej N. *Foundations of the Theory of Probability*. New York: Chelsea, 1950. Původně *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie*. Berlin: Springer,1933.

Laplace, Pierre Simon. *Philosophical Essay on Probabilities*. New York: Dover, 1952. Původně *Essai philosophique sur les probabilités*. Paris: Courcier, 1814.

Mačák, Karel. „Poznámky k formování teorie pravděpodobnosti v XVII. a XVIII. století." In *Historie matematiky II. Seminář pro vyučující na vysokých školách*, editovali Jindřich Bečvář a Eduard Fuchs, 29–68. Praha: Prometheus, 1997.

Marinoff, Louis. „A Resolution of Bertrand's Paradox." *Philosophy of Science* 61, no. 1 (1994): 1–24. https://doi.org/10.1086/289777.

Mikkelson, Jeffrey M. „Dissolving the Wine/Water Paradox." *The British Journal for the Philosophy of Science* 55, no. 1 (2004): 137–45. https://doi.org/10.1093/bjps/55.1.137.

Miller, David W. *Critical Rationalism. A Restatement and Defence*. Chicago: Open Court, 1994.

von Mises, Richard. *Probability, Statistics and Truth*. London: Allen, Unwin, 1961. Původně *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*. Wien: Springer, 1928. https://doi.org/10.1007/978-3-662-36230-3.

Mošna, František. *Pravděpodobnost a náhodné veličiny*. Praha: Pedagogická fakulta UK, 2017.

Pinc, Zdeněk. *Fragmenty k filosofii výchovy*. Praha: Oikoymenh, 2000.

Popper, Karl R. *A World of Propensities*. Bristol: Thoemmes, 1990.

Ramsey, Frank P. „Truth and Probability." In *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays,* edited by Richard B. Braithwaite, 156–98. London: Kegan Paul, Trench, Trübner, 1931. Původně 1926.

Rowbottom, Darrell P. „Bertrand's Paradox Revisited: Why Bertrand's ‚Solutions' Are All Inapplicable." *Philosophia Mathematica* 21, no. 1 (2013): 110–14. https://doi.org/10.1093/philmat/nks028.

Saxl, Ivan. „Pravděpodobnost ve středověku." *Informační bulletin České statistické společnosti* 20, č. 2 (2009): 1–9.

Saxl, Ivan a Lucia Ilucová. „Abraham de Moivre." In *Matematika v proměnách věků V.*, editovali Martina Bečvářová a Jindřich Bečvář, 6–55. Praha: Matfyzpress, 2007.

Saxl, Ivan. „Filosofické interpretace pravděpodobnosti." In *Matematika v proměnách času III.*, editovali Jindřich Bečvář a Eduard Fuchs, 132–55. Praha: Výzkumné centrum pro dějiny vědy, 2004.

Shackel, Nicholas. „Bertrand's Paradox and the Principle of Indifference." *Philosophy of Science* 74, no. 2 (2007): 150–75. https://doi.org/10.1086/519028.

Stewart, Ian. *Hraje bůh kostky?* Praha: Argo – Dokořán, 2009.

Van Fraassen, Bas C. *Laws and Symmetry*. Oxford: Clarendon Press, 1989. https://doi.org/10.1093/0198248601.001.0001.

Vopěnka, Petr. *Hádání v hospodě*. Praha: Práh, 2013.