https://doi.org/10.46938/tv.2023.605

CANTORŮV DIAGONÁLNÍ DŮKAZ

Abstrakt: *Cantorův diagonální důkaz je významný jednak proto, že jím použitá ústřední dokazovací metoda byla následně aplikována i v řadě dalších důkazů, jednak z toho důvodu, že je považován za potvrzující existenci nekonečných množin, které svojí velikostí zásadně a řádově přesahují velikost „klasického" nekonečného souboru představovaného všemi přirozenými čísly, přičemž tato jejich velikost může teoreticky překročit každou myslitelnou mez. Ač bývá Cantorův důkaz obecně vědeckou komunitou přijímán, někteří odborníci k němu přistupují poněkud rezervovaně. Cílem tohoto pojednání je představit Cantorův důkaz přístupným způsobem a zároveň poukázat na jeho (skryté) předpoklady a možná problematická místa a upozornit na fakt, že některé z jeho výchozích předpokladů nejsou nějaké nezpochybnitelné matematické pravdy, ale spíše postulované teze, které mohou, ale nemusejí být přijaty.*

Klíčová slova: *Cantorův diagonální důkaz; aktuální a potenciální nekonečno; reálná čísla; mohutnost množiny; rekurzivní funkce*

MARTA VLASÁKOVÁ
Oddělení logiky
Filosofický ústav AV ČR, v. v. i.
Jilská 1, 110 00 Praha
email / marta.vlasakova@flu.cas.cz
0000-0002-9527-0390

Cantor's Diagonal Proof

Abstract: *Cantor's diagonal proof is significant both because the central method of proof used in it has been subsequently applied in a number of other proofs, and because it is considered to confirm the existence of infinite sets whose size fundamentally and by an order of magnitude exceeds the size of the "classical" infinite set represented by all natural numbers, while their size can theoretically exceed every conceivable limit. Although Cantor's proof is generally accepted by the scientific community, some experts are somewhat reserved about it. The aim of this paper is to present Cantor's proof in an accessible way, while pointing out its (hidden) assumptions and possible problematic points, and pointing out that some of its underlying assumptions are not indisputable mathematical truths, but rather postulated propositions that may or may not be accepted.*

Keywords: *Cantor's diagonal proof; actual and potential infinity; real numbers; set cardinality; recursive function*

Tato studie vznikla v rámci projektu GA23-07119S „Význam jako objekt – principy sémantických teorií" podpořeného Grantovou agenturou České republiky a řešeného ve Filosofickém ústavu AV ČR, v. v. i., v Praze.

1. Úvod

Georg Cantor publikoval v roce 1891 matematický důkaz[1], který se jednak stal vzorem pro nejrůznější verze využití ústřední myšlenky diagonálního dokazovacího postupu v dalších důkazech, jednak je jeho výsledek v zásadě považován za potvrzující existenci takových nekonečných množin, které svojí velikostí zásadně a řádově přesahují velikost nekonečného souboru představovaného všemi přirozenými čísly. O daný důkaz teorie množin opírá svoji představu stále rostoucí hierarchie nekonečných množin, jejichž velikost může překročit každou myslitelnou mez. *Cantorova věta* tak patří k jakýmsi základním nosným pilířům moderní teorie množin.[2]

2. Aktuální a potenciální nekonečno

Pro pochopení závažnosti Cantorova důkazu je možná dobré začít u klasického Aristotelova vymezení nekonečna, které pak bylo po staletí standardně přijímáno. Aristotelés chápe *nekonečno* neboli (možná výstižněji přeloženo) *neomezeno* jako „matematicky" vyjádřitelné v tom smyslu, že každý počet (diskrétní veličinu) lze stále znovu zvětšovat, neexistuje nic jako nejvyšší číslo či nejvyšší počet; a zároveň každou spojitou velikost lze stále znovu dělit na menší části, které lze pak opět dělit na menší části, a tak stále dál, neomezeně, „do nekonečna" – nikdy se nedostaneme k tak malé spojité velikosti, abychom ji už nemohli znovu rozdělit. V tomto smyslu je tedy něco neomezené či nekonečné vlastně pouze „v možnosti", „potenciálně": žádné uskutečněné zvětšení počtu či rozdělení spojité velikosti neukončí možnost dalšího zvětšení či dělení. Aristotelské potenciální nekonečno („co vskutku připouští stále jen jíti dále bez konce"[3]) tedy není nějakým „skutečným" nekonečnem, pouze disponuje nevyčerpatelnou potenciální zvětšitelností (případně dělitelností) – z toho důvodu ani *nemůže* být učiněno aktuálním v tom smyslu, že by bylo ukončené a nebylo by již dále možné k němu něco přidat, případně je dále dělit: potenciálně nekonečné se tedy nemůže stát

[1] Totiž v článku Georg Cantor, „Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre," *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 1 (1891): 75–78.

[2] „Způsob, jakým se tvoří podmnožiny u konečných množin, lze bez obtíží přenésti na množiny nekonečné. Také u těchto množin platí, že kardinální číslo všech podmnožin je větší než kardinální číslo množiny původní. Obecný důkaz této věty provedl Cantor (t. zv. diagonální methodou) a od té doby patří k základním poznatkům theorie množin." Otakar Zich, *Úvod do filosofie matematiky* (Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1947), 123.

[3] Aristotelés, Fys. 204a5-204a6, podobně též Aristotelés, Met. 1066a38. Použity české překlady Aristotelés, *Metafyzika* (Praha: Rezek, 2003) a Aristotelés, *Fyzika* (Praha: Rezek, 1996).

aktuálně nekonečným, jelikož by pak musel existovat největší, dále nezvětšitelný počet, či nejmenší, dále nedělitelná spojitá velikost.[4]

Nelze to chápat tak, že by potenciální a aktuální nekonečno byly nějaké dva druhy nekonečna – ve skutečnosti se jedná o dva zásadně odlišné pohledy na neomezeno. Zatímco potenciální nekonečno či neomezeno je vlastně jen *možností libovolného konečna*[5] (třeba libovolně velkého přirozeného čísla) a ona „nekonečnost“ či „neomezenost“ znamená pouze to, že tu neexistuje žádná mez, například nepřekročitelná konečná velikost, pojem aktuálního nekonečna se oproti tomu pojí s představou reálného nekonečna[6] či, v modernějším pojetí, s představou souboru obsahujícího nekonečné množství prvků (například úplně všechna přirozená čísla), přičemž tento soubor je hotový, neměnný, nedá se k němu již nic přidat[7] (Wittgensteinovými slovy se jedná o jakési „nekonečno v krabici“[8]).

[4] Celý odstavec viz Aristotelés, Fys. 206a7-207a14, 207a33-207b34, 226b18-227b2, 233b16--233b32.

[5] „Nekonečno […] konečnu nekonkuruje. Je tím, co nevylučuje z podstaty žádné konečno.“ Wittgenstein, „Gramatika nekonečna,“ in *O špatném nekonečnu*, eds. Vojtěch Kolman a Robert Roreitner (Praha: Filosofia, 2013), § 138, 548.

[6] Přičemž například dokonce i známý zastánce nekonečna v matematice David Hilbert se k myšlence reálného, realizovaného nekonečna staví velmi opatrně: „Ve všech případech je výsledek ten, že s homogenním kontinuem, které by připouštělo neustálou dělitelnost, a tím by realizovalo nekonečno v malém, se nikde ve skutečnosti nesetkáme. Nekonečná dělitelnost kontinua je operace, která existuje jen v myšlenkách. Je to jen idea, která byla vyvrácena naším pozorováním přírody a zkušenostmi fyziky a chemie. […] Viděli jsme již, že nekonečno nelze nalézt nikde ve skutečnosti, ať už se budeme odvolávat k jakýmkoli zkušenostem, pozorováním či vědám. […] [N]ekonečno není nikdy realizováno. Nevyskytuje se ani v přírodě, ani není přístupné jako základ našeho rozumového myšlení – v tom shledáváme pozoruhodnou harmonii mezi bytím a myšlením. V protikladu k původnímu Fregovu a Dedekindovu úsilí dospíváme k přesvědčení, že coby podmínka možnosti vědeckého poznání jsou nepostradatelné jisté názorné představy a vhledy, a sama logika nám zde nestačí. Možnost zacházet s nekonečnem může být zajištěna pouze na základě konečna. Rolí, která nekonečnu zbývá, je nejspíše vystupovat toliko jako idea – za předpokladu, že ideu chápeme spolu s Kantem jako pojem rozumu, který překračuje veškerou zkušenost a jímž je konkrétní završeno ve smyslu totality.“ David Hilbert, „O nekonečnu,“ in *O špatném nekonečnu*, eds. Vojtěch Kolman a Robert Roreitner (Praha: Filosofia, 2013), 346, 353, 365.

[7] „V analýze pracujeme s nekonečně malým a nekonečně velkým jen jako s limitními pojmy, jako s něčím stávajícím se, vznikajícím, vytvářejícím se, tedy – jak můžeme říci – jen jako s *potenciálním nekonečnem*. Ale tím ještě nezískáváme vlastní nekonečno. To je dáno až tehdy, když např. celek čísel 1, 2, 3, 4, … bereme v úvahu jakožto završenou jednotu či když nahlížíme všechny body úsečky jakožto tvořící určitý celek věcí, který před námi leží již hotový. Tento druh nekonečna bývá označován jako *aktuální nekonečno*.“ Hilbert, „O nekonečnu,“ 349.

[8] Ludwig Wittgenstein, „Gramatika nekonečna,“ in *O špatném nekonečnu*, eds. Vojtěch Kolman a Robert Roreitner (Praha: Filosofia, 2013), § 170, 559.

V zásadě se historicky uvažovalo o „nekonečnu" především v onom významu potenciálního neomezena. Byť se lze setkat s odlišným přístupem již dříve (třeba Bernard Bolzano nejen navrhoval akceptovat i aktuální nekonečno ve smyslu jakýchsi souborů, množin obsahujících nekonečné množství prvků, ale zároveň i rozpracovával způsob, jak s těmito nekonečnými soubory počítat[9]), Georg Cantor byl tím, kdo aktuálně nekonečné množiny a „nekonečná" (transfinitní) čísla etabloval a učinil z nich matematický standard.

Cantor předpokládá existenci množin o nekonečně mnoha prvcích. Množiny jsou chápány jako něco jednotného (každá množina představuje jedinečný objekt), hotového a uzavřeného[10] - v tomto smyslu je tu tedy ona potenciálně neomezená možnost zvětšit jakýkoli daný počet vlastně uskutečněna, každý i sebevětší počet prvků je již obsažen v příslušném nekonečném souboru. „Počet" prvků v takovéto množině všech možných počtů, tedy všech přirozených čísel, lze podle Cantora opět vyjádřit „číslem", totiž nekonečným *transfinitním* číslem ω, které má tu vlastnost, že je větší než jakékoli přirozené číslo, ale zároveň je nejnižším nekonečným číslem.[11] Podle Cantora tedy vlastně neplatí výchozí Aristotelův předpoklad, že každé číslo (počet) je konečné: byť se k číslu ω nedostaneme postupným zvětšováním konečných čísel, přece se podle Cantora jedná o číslo: lze ho zvětšovat (byť ne zmenšovat), provádět s ním aritmetické operace a porovnávat ho s ostatními čísly; přitom je větší než všechna konečná čísla a samo je nekonečné, transfinitní. Jeho zvětšováním dostaneme další transfinitní čísla, která vytvářejí další rostoucí řadu – jelikož jsou chápána jako *uspořádaná*, nazývá je Cantor „Ordnungszahlen", ordinální čísla.

3. Mohutnost množiny a Humeův princip

Kromě ustavení nekonečných čísel pracuje Cantor ještě s jedním podstatným výchozím předpokladem. Jedná se o tezi, která se někdy nazývá „Humeův princip": pokud lze dva soubory *A* a *B* navzájem spárovat tím způsobem, že každému prvku *A* je přiřazen právě jeden prvek *B*, odlišným prvkům *A* jsou přiřazeny odlišné prvky *B* a žádný prvek *A* ani *B* nezůstane nespáro-

[9] Viz Bernard Bolzano, *Paradoxy nekonečna* (Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1963).

[10] V současném pojetí jsou množiny zároveň chápány jako něco, čehož identita je dána právě a jen jeho prvky – nemohou tedy být ani teoreticky pojímány jako něco pouze potenciálního.

[11] Viz Georg Cantor, „Zur Begründung der transfiniten Mengenlehre II," *Mathematische Annalen* 49, no. 2 (1897): 221.

vaný, je prvků *A* stejně tolik jako prvků *B* (Gottlob Frege princip přibližuje na příkladu číšníka kontrolujícího, zda je na stole prostřeno stejně nožů jako talířů: číšník nemusí počítat zvlášť nože a zvlášť talíře, stačí mu, když zkontroluje, zda je každý talíř v páru s nožem – pokud ano, je jich určitě stejně[12]). Odborněji řečeno mají dvě množiny stejně prvků, resp. stejnou *mohutnost*, pokud mezi nimi existuje vzájemně jednoznačné zobrazení (bijekce).

Humeův princip se zdá neproblematicky platit u konečných množin, nicméně Cantor ho rozšiřuje i na množiny nekonečné: podle Cantora možnost takto spárovat prvky dvou nekonečných množin svědčí o tom, že množiny jsou „stejně velké", mají stejnou *mohutnost* – Cantor ji označuje jako „kardinální číslo"[13]. Takže například množina všech přirozených čísel a všech sudých přirozených čísel jsou podle tohoto cantorovského pojetí „stejně velké", jelikož prvky obou množin lze spárovat, tedy obě množiny je možné vzájemně jednoznačně zobrazit (např. funkcí $f(x) = 2x$), přestože se na první pohled zdá, že množina všech sudých přirozených čísel tvoří jen polovinu přirozených čísel. Takovéto množiny se standardně nazývají *spočetně nekonečné*: lze si je představovat jako takové množiny, jejichž prvky lze nějak očíslovat přirozenými čísly, přičemž však ona přirozená čísla stále stoupají, nelze nalézt žádný „poslední" očíslovaný prvek.

Podle Cantora však existují i takové nekonečné množiny, které spolu spárovat nelze, a tedy musejí mít různou mohutnost – toho se právě týká Cantorův diagonální důkaz.

[12] Gottlob Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* (Breslau: Wilhelm Koebner, 1884), § 70.

[13] „Cardinalzahl" – na rozdíl od dříve zmíněného ordinálního čísla kardinální čísla odrážejí pouze počet prvků množiny, zatímco ordinální číslo předpokládá nějaké uspořádání čísel. Srov.: „‚Mächtigkeit' oder ‚Cardinalzahl' von *M* nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hülfe unseres activen Denkvermögens dadurch aus der Menge *M* hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird. […] Zwei Mengen *M* und *N* nennen wir ‚äquivalent' […] wenn es möglich ist, dieselben gesetzmässig in eine derartige Beziehung zu einander zu setzen, dass jedem Element der einen von ihnen ein und nur ein Element der andern entspricht. […] Von fundamentaler Bedeutung ist es, dass zwei Mengen *M* und *N* dann und nur dann dieselbe Cardinalzahl haben, wenn sie äquivalent sind […]." Překlad: „‚Mohutnost' či ‚kardinální číslo' [množiny] *M* nazýváme obecný pojem, který vzniká pomocí naší aktivní schopnosti myšlení z množiny *M* tak, že se abstrahuje od povahy jejích různých prvků m a od pořádí, ve kterém jsou dány. […] Dvě množiny *M* a *N* nazýváme ‚ekvivalentní' […], pokud je možné je vzájemně vztáhnout takovou relací, že každý prvek jedné odpovídá jednomu a pouze jednomu prvku druhé. […] Je zcela zásadní, že dvě množiny *M* a *N* mají tehdy a jen tehdy totéž kardinální číslo, pokud jsou ekvivalentní […]." Georg Cantor, „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre 1," *Mathematische Annalen* 46, no. 4 (1895): 481–82.

Ač je tento přístup k porovnávání nekonečných množin dnes v matematice běžný a nezpochybňovaný, jedná se ve skutečnosti o poměrně silný výchozí předpoklad, který není vůbec tak samozřejmý či neproblematický, jak se obvykle má za to. Povšimněme si podstatného rozdílu mezi Humeovým principem aplikovaným na konečné soubory (jak byl podle všeho míněn i Humem[14]), a aplikovaným na soubory nekonečné: U stejně velkých konečných souborů platí, že kdykoli je zobrazení přiřazující prvky jednoho souboru A prvkům druhého souboru B prosté (tj. nepřiřazuje žádným dvěma různým vzorům stejný obraz), je zároveň i „na", tj. jeho oborem hodnot je vždy celý druhý soubor (vyčerpá celý rozsah souboru B); tedy párujeme-li konečné soubory se stejným počtem prvků, vždy se nám povede všechny prvky spárovat, bez ohledu na to, jaké páry vytvoříme. To ovšem u „stejně velkých" nekonečných souborů rozhodně neplatí: tam je naopak vždy nekonečně mnoho zobrazení, která jsou sice prostá, ale přesto nejsou *na* celý druhý soubor (z druhého souboru zbudou nepřiřazené prvky). Například ve výše uvedeném příkladu zobrazení přirozených čísel do množiny sudých čísel můžeme zvolit funkci $f(x) = 2x + 2$, která vzájemně jednoznačně zobrazí všechna přirozená čísla na celou množinu sudých čísel větších než dvě, ale samotné číslo dvě už nemá k dispozici žádný vzor, funkce tedy bude prostým zobrazením pouze *do* množiny sudých přirozených čísel, nikoli *na* tuto množinu. A třeba funkce $f(x) = 4x$ vzájemně jednoznačně zobrazí celou množinu přirozených čísel na množinu $\{4, 8, 12, \ldots\}$, tedy množinu kladných násobků čtyř, takže z množiny sudých přirozených čísel „zbude" dokonce nekonečná množina všech ostatních sudých čísel $\{2, 6, 10, \ldots\}$, pro jejíž prvky nebudou už k dispozici žádné vzory mezi přirozenými čísly. Libovolnou množinu je možné zobrazovat i na sebe samu: přestože ale nikdo nepochybuje o tom, že každá množina je sama se sebou stejně velká, a každou množinu lze na sebe samu vzájemně jednoznačně zobrazit přinejmenším zobrazením identity, tj. předpisem $f(x) = x$, u nekonečných množin opět existuje nekonečné množství zobrazení množiny do sebe samé, které je sice prosté, ale není „na" (třeba již zmíněný předpis $f(x) = 2x$ pro množinu přirozených čísel). Vzájemně jednoznačné zobrazení, tedy párování prvků jedné a druhé (či stejné) nekonečné množiny tudíž rozhodně nemusí vést k úplnému spárování množin. Zatímco tedy u konečných množin *každé* párování vede k úplnému spárování prvků obou stejně velkých množin,

[14] Srov. David Hume, *A Treatise of Human Nature I* (London: J. Noon, 1739), I.3.I: „When two numbers are so combined, as that the one has always a unite answering to every unite of the other, we pronounce them equal".

u nekonečných množin o stejné mohutnosti dokonce *nekonečně* mnoho způsobů párování *nevede* k úplnému spárování.[15] Zdá se tedy, že si Cantor z analogie s konečnými počty vypůjčil jen určitou vybranou část (možnost vzájemně jednoznačného zobrazení stejně velkých množin), která má platit i pro nekonečná čísla, o zbytku (*každé* prosté zobrazení dvou stejně velkých množin je vzájemně jednoznačné) ovšem nepředpokládá, že by měl platit i pro nekonečné počty.[16]

Proti Cantorově výchozí tezi či intuici, že platí-li poučka „je-li možné dva soubory vzájemně jednoznačně spárovat, jsou stejně veliké" pro konečné soubory, měla by analogicky platit i pro nekonečné soubory, stojí neméně přesvědčivá intuice, podle které je vždy celek větší než jeho vlastní část, respektive že pokud z celku něco ubereme (třeba z přirozených čísel všechna lichá čísla), musí být zbytek menší než původní celek.

Již zmíněný Bolzano považuje onu možnost spárovat i „různě velké" nekonečné množiny (z nichž je třeba jedna vlastní částí té druhé) pomocí vzájemně jednoznačného zobrazení za jeden z „paradoxů nekonečna": rozhodně to podle Bolzana neznamená, na rozdíl od konečných množin, že by dané množiny měly stejné množství prvků; ona možnost vzájemně jednoznačného přiřazení je dána tím, že je prvků nekonečně mnoho, takže se nikdy nevyčerpá možnost spárování další dvojice vzor-obraz.[17] Podle Bolzana mají spárovatelné nekonečně veliké množiny stejně prvků pouze tehdy, „přistoupí-li k tomu ještě nějaký jiný důvod, jako například to, že obě množiny mají zcela stejná základní určení, například zcela stejný způsob vzniku."[18]

Vrátíme-li se nyní ke Cantorovým východiskům, je pro celou jeho teorii zásadní jednak to, že připouští existenci aktuálně nekonečných souborů, a tedy i nekonečných (transfinitních) čísel, a jednak skutečnost, že za mě-

[15] Richard Dedekind tento specifický rys předpokládaný u nekonečných množin dokonce využívá k definování toho, co je nekonečná množina: lze-li množinu vzájemně jednoznačně zobrazit na její vlastní podmnožinu (tj. podmnožinu, která není totožná s původní množinou), jedná se o nekonečnou množinu (srovnej Richard Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen* (Braunschweig: Vieweg Verlag, 1888), § 5, 64 a § 1, 6.

[16] Srovnej Poincarého komentář k této problematice v případě Zermelových axiomů: „Uvědomme si ale, jakým způsobem je [axiomy] Zermelo zkonstruoval. Vzal axiomy, které jsou pravdivé o konečných souborech; platnost všech těchto axiomů však nebylo možné rozšířit i na nekonečné soubory, a tak to udělal jen v případě některých z nich, které vybral více méně náhodně." Henri Poincaré, „Logika nekonečna," in *O špatném nekonečnu*, eds. Vojtěch Kolman a Robert Roreitner (Praha: Filosofia, 2013), 340.

[17] Srov. Bolzano, *Paradoxy nekonečna*, §§ 20–24.

[18] Ibid., § 21, viz též § 24.

řítko stejného počtu prvků v množině považuje v případě nekonečných množin možnost nalézt nějaké vzájemně jednoznačné zobrazení.

4. Diagonální důkaz

4.1 Myšlenka důkazu

Po objasnění Cantorových výchozích předpokladů se dostáváme k jeho diagonálnímu důkazu. Nejprve si na zjednodušeném příkladu ozřejměme ideu důkazu.[19] Představme si, že máme nějakou *čtvercovou* tabulku, ve které máme pro jednoduchost jen dvě hodnoty, 0 a 1, a jejíž řádky se od sebe liší, třeba:

0	1	1	0
1	1	1	1
0	0	0	1
0	0	0	0

Je možné přidat k takovéto tabulce nový řádek, který v ní ještě není uveden? Odpověď zní *ano*, a co víc, jedná-li se o čtvercovou tabulku (případně tabulku, která má více sloupců než řádků), zní odpověď *vždy* ano – vždy lze vytvořit řádek, který v tabulce ještě není uveden. Postup je následující: uvažme čísla uvedená v diagonále tabulky, tedy

0	1	1	0
1	**1**	1	1
0	0	**0**	1
0	0	0	**0**

Nyní je uvažujme v tom pořadí, v jakém byla v diagonále shora dolů, a změňme hodnotu každého z nich na „opačnou“ hodnotu (tedy 0 na 1 a 1 na 0), čímž dostaneme novou posloupnost, tzv. *antidiagonálu*:

$$0\ 1\ 0\ 0 \rightarrow 1\ 0\ 1\ 1$$

[19] Srov. srozumitelný výklad v Jaroslav Peregrin, „Diagonal Arguments,“ *AUC Philosophica et Historica/Miscellanea Logica*, no. 2 (2017): 33–43.

Takto vygenerovaná posloupnost se na prvním místě liší od prvního řádku, na druhém místě od druhého řádku, na třetím od třetího řádku a na čtvrtém od čtvrtého řádku, liší se tedy od všech řádků tabulky, a lze ji tudíž přidat jako nový řádek tabulky, který se v tabulce ještě nevyskytuje. Takto lze vygenerovat nový řádek čtvercové tabulky *vždy*, bez ohledu na to, zda má tabulka čtyři řádky a sloupce, nebo třeba sto řádků a sloupců. Musí ovšem být čtvercová (či mít více sloupců než řádků) – pokud by měla více řádků než sloupců, „finta“ s antidiagonálou by nefungovala, jelikož do „přesahujících“ řádků už by diagonála nezasahovala (a nemusela by se tedy od nich již lišit):

0	1	1	0
1	**1**	1	1
0	0	**0**	1
0	0	0	**0**
1	0	1	1

(Povšimněme si, že poslední řádek tabulky je právě ona antidiagonála.)

Nyní si představme, že se zabýváme *nekonečnou* tabulkou, tedy tabulkou, u které za každým sloupcem směrem doprava následuje další sloupec a pod každým řádkem směrem dolů následuje další řádek. Představme si třeba, jako Georg Cantor[20], že máme pod sebou vypsány všechny možné posloupnosti tvořené pomocí dvou znaků „m“ a „w“ (tedy např. posloupnost „m, m, m, m, …“ či „m, w, m, w, m, w, …“ jdoucí do nekonečna). Tento seznam můžeme chápat jako jakousi nekonečnou tabulku, jejíž jednotlivé řádky představují ony jednotlivé posloupnosti. Označme si jako $a_{i,j}$ obsahy jednotlivých buněk tabulky, kde na místě i je číslo řádku, na místě j číslo sloupce (hodnotou každého $a_{i,j}$ přitom může být pouze znak „m“ nebo znak „w“):

[20] Následující výklad odpovídá, až na drobné technické detaily, Cantorovu důkazu v jeho článku Cantor, „Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre,“ 75–78. Cantor ovšem podobné tvrzení dokázal pomocí méně „elegantního“ důkazu již dříve, v článku Georg Cantor, „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen,“ *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 77 (1874): 258–62.

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	…
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	…
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	…
…	…	…	…

Aplikujeme-li předešlou úvahu o antidiagonále, vidíme, že uvedený výpis všech možných posloupností znaků m a w není nikdy kompletní, vždy lze k nekonečné tabulce přidat ještě nový řádek: totiž takový, který má na prvním místě znak odlišný od $a_{1,1}$, na druhém místě znak odlišný od $a_{2,2}$ atd., liší se tedy na i-tém místě od i-tého řádku tabulky. Zdálo by se, že jediný nový řádek v případě nekonečné tabulky tolik neznamená – můžeme ho přece do tabulky někam přidat a tabulka bude nadále stejně nekonečná. Takto obměněná tabulka by se ovšem lišila od té původní oním novým, řekněme n-tým řádkem, který jsme k tabulce přidali: a jelikož se přidaný řádek shodný s antidiagonálou liší od každého řádku tabulky na jeho diagonálním místě, liší se i od původního n-tého řádku tabulky na n-tém místě, a tedy nová diagonála (tudíž i antidiagonála) takto doplněné tabulky bude odlišná od oné *původní* diagonály staré tabulky, takže opět lze nově identifikovat řádek, který v nové tabulce nemůže být obsažen. Jakkoli upravená nebo doplněná tabulka tedy nikdy nebude zahrnovat všechny *možné* řádky. Ani spočetně nekonečně mnoho řádků nekonečné čtvercové tabulky nám principiálně nikdy nestačí na vypsání *všech* možných nekonečných posloupností, všechny posloupnosti tedy není možné očíslovat (vzájemně jednoznačně spárovat s přirozenými čísly), a musí jich tudíž být nějak podstatně víc, než je přirozených čísel.

Cantorova úvaha se obvykle interpretuje rovnou pro zápisy reálných čísel, přičemž stačí reálná čísla z uzavřeného intervalu $\langle 0,1 \rangle$ (je-li jich nespočetně mnoho, pak tím spíše všech reálných čísel nemůže být spočetně mnoho) – řádky tabulky tedy představují rozvoj za desetinnou čárkou čísla 0,… reprezentovaný nekonečnou posloupností číslic.

Cantor vidí ve svém důkazu potvrzení, že reálných čísel je nějak podstatně, principiálně více než přirozených čísel (kterých je nekonečno), tedy že je ještě nějaké větší nekonečno, než je aktuální nekonečno přirozených čísel – tzv. *nespočetné* nekonečno.

Cantor svůj důkaz dále zobecňuje. Řekli jsme si, že pro Cantora je měřítkem „stejné velikosti“, resp. stejné mohutnosti nekonečných množin existence vzájemně jednoznačného přiřazení. Jsou-li dvě nekonečné množiny různě veliké, tj. mají-li různou mohutnost, znamená to, že neexistuje žádné zobrazení jedné na druhou, které by bylo vzájemně jednoznačné. Cantor ukazuje, že máme-li obecně jakoukoli množinu M a množinu všech jejích podmnožin (tedy tzv. *potenční množinu* či *potenci* množiny M), principiálně nemůže existovat mezi těmito dvěma množinami vzájemně jednoznačné zobrazení. Důkaz provádí sporem: Nechť takové zobrazení existuje, nazvěme ho třeba g. Ke každému prvku $a \in M$ by $g(a)$ mělo mít jako hodnotu jedinou podmnožinu množiny M a ke každé podmnožině m množiny M by měl existovat právě jeden prvek b množiny M takový, že $g(b) = m$. Nyní uvažme množinu všech prvků množiny M takových, že nejsou prvkem svého obrazu v zobrazení g, tj. $\{x \in M; x \notin g(x)\}$, označme ji Q. Q je množina prvků z množiny M, jedná se tedy o podmnožinu množiny M (dokonce i kdyby byla tato množina Q prázdná, byla by podmnožinou množiny M, neboť prázdná množina je podmnožinou každé množiny). Měl by k ní tedy existovat vzor, tedy takový prvek $q \in M$, pro který platí $g(q) = Q$. Nyní by ale měla nastat jedna ze dvou možností, buď $q \in Q$, nebo $q \notin Q$. Pokud $q \in Q$, mělo by q splňovat výše uvedenou charakteristiku prvků množiny Q, tedy mělo by platit $q \notin g(q)$, tj. $q \notin Q$. Pokud ovšem platí $q \notin Q$, znamená to, že q splňuje výše uvedenou charakteristiku $q \notin g(q)$, a tedy $q \in Q$. Platí tedy $q \in Q \leftrightarrow q \notin Q$, což je spor. Předpoklad existence vzájemně jednoznačného zobrazení g mezi množinou a její potencí tedy vede ke sporu, tudíž takové zobrazení principiálně nemůže existovat.[21]

V tomto důkazu je potřeba zdůraznit dvě věci: 1) uvědomme si, že tato formulace důkazu v určitém ohledu odpovídá výše uvedené antidiagonální metodě. Nechť prvkům a, b, c, … množiny M přiřadíme jednotlivé podmnožiny množiny M. Podmnožiny lze popsat pomocí tzv. charakteristické funkce, tj. funkce, která přiřadí 1 všem těm prvkům množiny M, které jsou prvky popisované podmnožiny, 0 pak všem ostatním prvkům množiny M (Cantor ve svém důkazu používá právě tyto charakteristické funkce jako reprezentace všech možných podmnožin množiny M). Uvedené si tedy můžeme zapsat do tabulky:

[21] Je potřeba mít na paměti, že toto je reprodukce důkazu, která představuje jeho etablovanou interpretaci: Cantor sám formuluje důkaz trochu odlišně, namísto s množinami pracuje s jejich charakteristickými funkcemi a patrně nechápe všechny pojmy úplně tak, jak je dnes obvyklé (pojem množiny byl tehdy teprve zaváděn) – např. Ferreirós ve své historické analýze (José Ferreirós, *Labyrint of Thought – A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics* (Basel: Birkhäuser, 2007), 287) upozorňuje na skutečnost, že Cantor chápal funkce (i charakteristické funkce) jako odlišné od množin.

	a	b	c	
$g(a)$	0	1	1	…
$g(b)$	1	1	0	…
$g(c)$	0	0	0	…
…	…	…	…	…

První řádek tabulky představuje jistou podmnožinu množiny *M*, a sice takovou, která je oním předpokládaným vzájemně jednoznačným zobrazením g přiřazena určitému prvku množiny *M*, totiž prvku *a*. Tato podmnožina je řádkem jednoznačně určena: je-li ve sloupečku nějakého prvku α uvedena 0, znamená to, že α není prvkem této množiny, 1 naopak znamená, že příslušný prvek α prvkem dané podmnožiny je (podmnožina $g(a)$ popsaná prvním řádkem tabulky tedy neobsahuje *a*, obsahuje *b*, obsahuje *c*, …). Podobně reprezentují podmnožiny množiny *M* i další řádky tabulky. Uvědomme si nyní, že diagonála tabulky (chápaná jako charakteristická funkce) vlastně představuje množinu všech takových α, které jsou prvky svého obrazu $g(\alpha)$ (tj. mají na příslušném místě ve sloupci α hodnotu 1). Pokud vytvoříme antidiagonálu tak, že místo 1 dáme 0 a místo 0 dáme 1, dostaneme tak vlastně charakteristickou funkci množiny všech α takových, které *nejsou* prvkem svého obrazu $g(\alpha)$. Jelikož antidiagonála principiálně nemůže být obsažena v tabulce, ani ona množina všech α takových, že nejsou prvkem svého obrazu $g(\alpha)$, kterou antidiagonála představuje, nemůže být obsažena v tabulce, a nelze k ní tedy najít příslušný vzor α.

Dále je ale třeba si uvědomit, že 2) Cantorovo tvrzení o neexistenci vzájemně jednoznačného zobrazení mezi množinou a její potencí je obecnějšího rázu: platí pro všechny množiny, tedy nejen pro nekonečnou spočetnou množinu přirozených čísel a její potenci, ale i pro tuto potenci a její potenci (tj. množinu všech podmnožin množiny všech podmnožin přirozených čísel) a obecně pro jakkoli mohutnou množinu. U množin mohutnějších než spočetně nekonečné množiny je otázka, zda lze nějak smysluplně mluvit o *tabulce* (jakémsi postupném výpisu) všech podmnožin, Cantorův důkaz o neexistenci vzájemně jednoznačného zobrazení ale nevyžaduje tabulku jako takovou (i když, jak jsme viděli, může tabulka na určité úrovni přispět k větší názornosti důkazu). „Diagonální metoda" Cantorova zobecněného důkazu se omezuje na uvažování množiny všech takových vzorů, které nejsou prvkem svého obrazu, nevyžaduje se tu nějaká skutečná diagonála tabulky.

Co vlastně má Cantorův důkaz dokazovat? Jeho první část má ukázat, že reálná čísla (dokonce i jen reálná čísla z intervalu ⟨0,1⟩) nelze vypsat do nekonečné spočetné posloupnosti řádků. Reálných čísel je „víc“, vždy bude existovat takové, které se v dané posloupnosti nevyskytuje. Znamená to, že vedle oné postulované aktuálně nekonečné množiny všech přirozených čísel tu máme ještě nějakou podstatně „větší“ množinu, takovou, kterou nelze na množinu přirozených čísel vzájemně jednoznačně zobrazit. Druhá, zobecněná část důkazu má ukázat, že ke každé sebevětší množině existuje vždy množina podstatně, zásadně větší, kterou nelze na původní množinu vzájemně jednoznačně zobrazit: totiž potence příslušné množiny, tj. množina všech jejích podmnožin.

To vposledku vede k závěru, že oblast nekonečna co do mohutnosti neomezeně „bobtná“. Matematik David Hilbert tuto říši mohutnějších a mohutnějších nekonečen dokonce považoval za jakýsi ráj matematiků: „Nikdo nás nebude moci vyhnat z ráje, který pro nás stvořil Cantor,“[22] prohlašuje v reakci na paradoxy, které v souvislosti s Cantorovou teorií vyvstaly a zdály se ji podstatně zpochybňovat. Cantorův důkaz má tedy poměrně dalekosáhlé dopady na bohatost „ontologie teorie množin“.

5. Zádrhele a pochybnosti

Zkusme se nyní podívat na některé pochybnosti a výhrady, které lze v souvislosti s důkazem vznést. Uvažme nejprve první část důkazu, respektive její etablovanou interpretaci. V té se vlastně předpokládá, že je možné se pokusit vypsat reálná čísla jedno po druhém do posloupnosti (tabulky), přičemž reálná čísla od 0 do 1 mají být reprezentována posloupností číslic za desetinnou čárkou, která teoreticky může být nekonečná. Vlastně nás důsledně vzato zajímají pouze ty posloupnosti, které *jsou* aktuálně nekonečné: jakékoli číslo s konečným počtem desetinných míst (resp. s konečným počtem nenulových desetinných míst) je ve skutečnosti racionální číslo (lze je zapsat jako zlomek), a racionálních čísel je ve smyslu vzájemně jednoznačné zobrazitelnosti „stejně“ jako přirozených čísel – čeho tedy musí být nějak víc, jsou

[22] „Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.“ David Hilbert, „Über das Unendliche,“ *Mathematische Annalen* 95, no. 1 (1926): 170. Hilbert tak reaguje na problémy, které pro Cantorovu teorii představují následně se vynořivší paradoxy (tzv. paradoxy naivní teorie množin).

iracionální čísla. Cantor navíc dokazuje, že dokonce i algebraických čísel (tj. čísel, která jsou řešením algebraické rovnice, jako je např. $\sqrt{2}$ řešením rovnice $x^2 - 2 = 0$) je spočetně mnoho, onu nespočetnost reálných čísel tedy musejí mít na svědomí tzv. transcendentní čísla, jako je π.[23]

5.1 Nekonečná řada

Nicméně jazykové prostředky a matematické symboly z povahy věci nepřipouštějí existenci nějakého nekonečného řetězce: byť můžeme pomocí číslic teoreticky zapsat libovolně velké číslo, vždy se musí jednat o konečnou posloupnost číslic; podobně lze teoreticky zapsat číslo s velmi dlouhým desetinným rozvojem, tento rozvoj ovšem musí být konečný. Všimněme si, že čísla, která nelze zapsat pomocí konečné posloupnosti čísel, musejí matematikové popisovat a pojmenovávat pomocí dalších výrazů a symbolů: pomocí symbolu „$\sqrt{2}$" lze pojmenovat číslo, které lze popsat či zadat jako „poměr úhlopříčky čtverce k jeho straně", pomocí symbolu „π" se označuje číslo, které lze popsat jako „poměr obvodu kruhu k jeho průměru" aj. Jinými slovy, použít *nekonečnou* řadu číslic jako reprezentaci určitého čísla je nemožné a ani to nedává moc smysl (stejně jako nedává smysl třeba představa nekonečně dlouhé věty).

Ta reálná čísla, která lze zapsat pomocí konečných posloupností, jsou tedy ve skutečnosti racionální čísla, a tudíž jsou pro diagonální důkaz irelevantní, a nekonečné zápisy posloupností nedávají smysl (uvědomme si ještě jednou, že nikdy, žádným přidáním dalších desetinných míst nedostaneme aktuálně nekonečnou posloupnost – vždy maximálně „hodně dlouhou" posloupnost). Nicméně představa je obvykle taková, že jelikož iracionální čísla nelze reprezentovat konečnou posloupností číslic, je potřeba si je představovat jako taková čísla, která *by byla* reprezentována nekonečnou posloupností číslic, *kdyby* tedy taková posloupnost mohla existovat.

Tato představa reprezentace vnáší do diagonálního argumentu určitý zádrhel: některé reprezentace sice vypadají různě, „ve skutečnosti" (na základě přijímaného úzu) ovšem reprezentují jedno a totéž číslo – tak je nekonečná posloupnost 0,099999… považována za reprezentaci *téhož* reálného čísla jako reprezentace 0,10000… (tj. 0,1). Mohlo by se tedy stát, že byť se antidiagonála bude od jednoho každého *n*-tého řádku lišit na místě *n*, přesto bude reprezentovat číslo, které je už v tabulce obsaženo, ovšem zastoupené

[23] Viz Cantor, „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen," 258–62.

jinou reprezentací. Kdyby tedy vyšla antidiagonála třeba oněch 0,099999…, jistě by se lišila od posloupnosti číslic 0,10000… na každém desetinném místě, ovšem ve skutečnosti by reprezentovala číslo, které již může být v tabulce zapsané – totiž právě onou reprezentací 0,10000… Obvykle se uvedený problém řeší tak, že se při volbě antidiagonálních číslic vyloučí devítka a nula (takže se například nahradí každé diagonální číslo, které je různé od tří, trojkou, číslo tři třeba čtyřkou), čímž se vyloučí dvojí reprezentace. Ovšem uvážíme-li argument v binární soustavě (která je blíže způsobu, jakým argument podal Cantor, totiž obměňování posloupnosti složené jen ze dvou znaků), právě naznačený úhybný manévr není možný, jelikož hodnota antidiagonální číslice může být vždy jenom jedna, totiž ta „opačná“ k diagonální číslici. V tomto případě se nám může stát, že se nebude možné vyhnout tomu, aby antidiagonála „končila“ nekonečnou posloupností jedniček – a tedy by bylo možné, aby antidiagonální číslo bylo již v tabulce zapsáno jinou reprezentací. Je poněkud zarážející, že ony reprezentace reálných čísel pomocí nekonečných posloupností číslic jsou jednak nerealizovatelné, jednak nejednoznačné – a přitom je na jejich realizovatelnosti a jednoznačnosti celý důkaz postaven.[24] Platí-li důkaz pro reálná čísla, měl by pro ně platit nezávisle na tom, jak jsou zrovna reprezentována: dokazujeme-li, dejme tomu, že neexistuje nejvyšší prvočíslo, měl by být důkaz platný bez ohledu na to, zapisujeme-li čísla v desítkové, nebo dvojkové soustavě.

Problém je v tom, že diagonální důkaz směšuje dohromady iracionální čísla se způsobem jejich zápisu. Pokud vezmeme Cantorův důkaz doslova, tedy představíme si, že máme pod sebe seřazené *nekonečné* posloupnosti znaků „m“ a „w“, lze snadno namítnout, že žádné nekonečné posloupnosti znaků neexistují a ani nemohou existovat, takže není, co bychom řadili. Pokud chceme uchopit nekonečný desetinný rozvoj iracionálních čísel nějak matematicky, jako abstraktní matematický objekt, například jako nekonečný součet součinů $a_{11}.1/10 + a_{12}.1/100 + a_{13}.1/1000 + \ldots$, tj. $a_{11}.10^{-1} + a_{12}.10^{-2} + a_{13}.10^{-3} + \ldots$, kde a_{kl} je nějaké přirozené číslo menší než 10, nabízí se možnost dané iracionální číslo chápat jako určené nekonečnou posloupností příslušných parametrů, tedy přirozených čísel menších než 10. Ovšem ani nekonečná řada čísel není nějaký neproblematický matematický

[24] Srovnej: „V tomto okamžiku může ovšem kritický čtenář přemýšlet, kde se ona dvojznačnost vzala a jaký je vůbec vztah určité reprezentace, v tomto případě nekonečné posloupnosti číslovek, k označovanému číslu, tedy k objektu, který je na ní v nějakém smyslu nezávislý. Tyto otázky nechávají matematici obvykle nezodpovězeny, resp. chovají se k nim jako k banalitám či je předpokládají jako neproblematické […],“ Vojtěch Kolman a Vít Punčochář, *Formy jazyka* (Praha: Filosofia, 2015), 302–3.

pojem, jak na to upozorňuje v této souvislosti Wittgenstein: „nekonečná číselná řada je pouze nekonečnou možností konečných číselných řad."[25] Nekonečná číselná řada jako taková není ve skutečnosti realizovatelná ani reprezentovatelná, jejím matematickým zachycením je nejspíše určitý předpis (funkce) přiřazující určité hodnoty přirozeným číslům (která vlastně určují pořadí hodnoty v posloupnosti) – jen takovýto předpis vytváří určitý potenciál „do nekonečna" (spíše neomezeně) pokračovat v řadě čísel.[26] Jen předpis či pravidlo může potenciálně produkovat další a další členy řady, „náhodná" nekonečná řada nedává podle Wittgensteina smysl.[27] V diagonálním důkazu mohou tedy být podle Wittgensteina nekonečné posloupnosti číslic v jednotlivých řádcích zadány jen pomocí určitých předpisů, jen jako funkce – a vytvoříme-li „antidiagonální" předpis využívající systém všech

[25] „Die unendliche Zahlenreihe ist nur die unendliche Möglichkeit von endlichen Zahlenreihen. In den Zeichen selbst liegt nur die Möglichkeit und nicht die Wirklichkeit der Wiederholung. Die Mathematik darf nicht versuchen, von ihrer Möglichkeit zu reden. Wenn sie versucht, ihre Möglichkeiten auszusprechen, d. h. wenn sie sie mit ihrer Wirklichkeit verwechselt, dann darf man sie in ihre Grenzen zurückweisen." Překlad: „Nekonečná číselná řada je pouze nekonečnou možností konečných číselných řad. Ve znacích samotných je jen možnost, nikoli skutečnost opakování. Matematika se nesmí pokoušet mluvit o své možnosti. Když se pokusí vyslovit své možnosti, tj. když je zamění se svou skutečností, pak smí být odkázána zpět do svých mezí." Ludwig Wittgenstein, *Philosophische Bemerkungen* (Frankfurt am Mein: Suhrkamp, 1964), § 144.

[26] Přitom je potřeba mít na paměti, že onen funkční předpis představuje vždy jen možnost, potencialitu: „Die Regeln über das Zahlensystem – etwa das Dezimalsystem – enthalten alles, was an den Zahlen unendlich ist. – Es hängt alles an der Syntax von Wirklichkeit und Möglichkeit. $m = 2n$ enthält die *Möglichkeit der Zuordnung jeder Zahl* zu einer andern, *aber es ordnet nicht alle Zahlen anderen zu*." Překlad: „Pravidla číselné soustavy – například desítkové soustavy – obsahují vše, co je na číslech nekonečné. – Vše závisí na syntaxi skutečnosti a možnosti. $m = 2n$ obsahuje *možnost přiřazení každého čísla* druhému, *ale nepřiřazuje všechna čísla druhým*." Wittgenstein, *Philosophische Bemerkungen*, § 141.

[27] „Regellose unendliche Dezimalzahl. ‚Die Zahl die herauskommt, wenn man endlos würfelt' scheint unsinnig zu sein. – Eine unendliche Baumreihe. Wenn ein Gesetz gegeben ist, nach welchem die Höhe der Bäume wechselt, so ist die Reihe durch das Gesetz bestimmt und vorstellbar. Wenn ich nun annehme, daß es eine regellose Reihe geben kann, so ist das eine Reihe über die ihrem Wesen nach nichts anderes bekannt sein kann, als daß ich sie nicht kennen kann." Překlad: „Nahodile pokračující nekonečné desetinné číslo. ‚Číslo, které vzniká, když se donekonečna hází kostkou', se zdá být nesmyslné. – Nekonečná řada stromů. Pokud je dán zákon, podle kterého se mění výška stromů, je řada tímto zákonem určená a představitelná. Když budu předpokládat, že může být nahodilá řada, pak je to řada, o které z její podstaty nemůže být známo nic jiného, než že ji nemohu znát." Wittgenstein, *Philosophische Bemerkungen*, § 145.

možných předpisů, dostáváme se již na jinou úroveň, tedy mimo systém.[28] Uvědomme si, že zatímco v případě zadávání předpisů jednotlivých funkcí popisujících neomezené řady přirozených čísel (mezi 0 a 9) využíváme různé kombinace „početních“ operací, v případě určování předpisu antidiagonální funkce musíme odkazovat na existující jednoznačně (přitom však nahodile) určenou posloupnost *všech* takto určených funkcí, tedy dostáváme se na metaúroveň vymezování. Podstatné je, že diagonální argument by mohl fungovat pouze za předpokladu, že reálná čísla existují nezávisle na zvolených reprezentacích, nicméně jejich (teoretickými) reprezentacemi jsou právě a jen *všechny* varianty nekonečných posloupností číslic (které mají představovat desetinný rozvoj reálných čísel) – což je ovšem předpoklad postulovaný[29], nikoli nějak přirozený (už kvůli tomu, že žádné nekonečné posloupnosti číslic nejsou možné, a zachycení nekonečných posloupností pomocí předpisů funkcí je limitováno právě možnostmi těchto předpisů, tedy možnostmi reprezentace).[30]

[28] „Cantor definiert eine *Verschiedenheit höherer Ordnung*, nämlich eine Verschiedenheit einer Entwicklung von einem *System* von Entwicklungen. Man kann diese Erklärung so benützen, daß man zeigt, daß eine Zahl in diesem Sinne von einem System von Zahlen verschieden ist: sagen wir π von dem System der algebraischen Zahlen. Aber wir können nicht gut sagen, die Regel, die Stellen in der Diagonale so und so zu verändern, sei dadurch als von den Regeln des Systems verschieden bewiesen, weil diese Regel selbst ‚höherer Ordnung‘ ist, denn sie *handelt* von der Veränderung eines Systems von Regeln und daher ist es von vornherein nicht klar, in welchem Fall wir die Entwickelung *so einer* Regel von allen Entwicklungen des Systems verschieden erklären wollen.“ Překlad: „Cantor definuje *diferenci vyššího řádu*, a to diferenci mezi rozvojem a systémem rozvojů. Pomocí tohoto vysvětlení lze ukázat, že číslo v tomto smyslu je odlišné od systému čísel: řekněme π od systému algebraických čísel. Ale nelze dost dobře říci, že jsme takto dokázali odlišnost pravidla měnícího pozice na diagonále takovým a takovým způsobem od pravidel systému, jelikož toto pravidlo samo je ‚vyššího řádu‘, neboť *pracuje* se změnou systému pravidel, a tudíž není od začátku jasné, v jakém případě chceme vysvětlit rozvoj takovéhoto pravidla jako odlišný ode všech rozvojů systému.“ Ludwig Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (London and Cambridge, MA: Basil Blackwell and MIT Press, 1967), II–7, 58.

[29] Srovnej: „Důkaz nespočetnosti kontinua totiž neimplikuje nutně, že je reálných čísel *více* než přirozených, a že tedy musí existovat reálná čísla nepojmenovatelná v jazyce. K takovému závěru lze dojít jen tehdy, (1) předpokládáme-li, že je jejich celek dán nezávisle na zvolených reprezentacích […]. Tím, že uchopil pojem funkce jako nejliberálnější rozšíření pojmu přiřazení, které je jednoznačné směrem vpravo, Cantor zdánlivě vyhrál celou ‚hru‘ na vymezení kontinua jednoduchým *fiat*.“ Vojtěch Kolman, *Filosofie čísla* (Praha: Filosofia, 2008), 383–84.

[30] K Wittgensteinovu pojetí viz též např. Valérie L. Therrien, „Wittgenstein and Labyrinth of ‚Actual Infinity‘: The Critique of Transfinite Set Theory,“ *Ithaque* 10 (2012). Podobný směr kritiky jako Wittgenstein volí i Vojtěch Kolman (Vojtěch Kolman, „Continuum, Name and Paradox,“ *Synthese* 175 (2010): 351–67, viz též Kolman a Punčochář, *Formy jazyka*, 301–14).

Obdobná nejasnost panuje i v oblasti teorie množin, konkrétně v otázce velikosti potenční množiny, které se týká druhá část Cantorova důkazu: Jak známo, Cantorova „naivní" teorie množin vedla k paradoxům, a byla proto nahrazena axiomaticky formulovanými teoriemi množin, přičemž nejčastěji používaná je Zermelova-Fraenkelova axiomatika (dále „ZF axiomatika" či „ZF teorie"). Množina je dnes často vymezována jako to, co je definováno axiomy teorie množin,[31] nikoli tedy třeba jako „soubor objektů", jak množiny „naivně" vymezuje Cantor.[32] ZF axiomatika je založena na myšlence tzv. kumulativní hierarchie: aby se teorie vyhnula „paradoxním" souborům (třeba Russellově množině všech množin neobsahujících sebe samé), vychází z představy, jako kdyby byly množiny postupně vytvářeny z již hotových množin, typicky vytvořením jejich potenční množiny, přičemž za výchozí množinu se považuje prázdná množina.[33] (Tato představa má ovšem jenom napomoci porozumět struktuře množinového univerza, množiny jsou standardně považovány za zcela statické, není na nich nic dynamického, onen proces vytváření jako by již byl hotov.) Zároveň se prohlásí jako axiom, že existuje aktuálně nekonečná množina – k té bychom přirozeně žádným

[31] Viz např. Joan Bagaria, „Set Theory," in *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, navštíveno 2. února 2023, https://plato.stanford.edu/archives/spr2023/entries/set-theory: „In set theory, however, as is usual in mathematics, sets are given axiomatically, so their existence and basic properties are postulated by the appropriate formal axioms. The axioms of set theory imply the existence of a set-theoretic universe so rich that all mathematical objects can be construed as sets."

[32] „Unter einer ‚Mannigfaltigkeit' oder ‚Menge' verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele, welches sich als Einen denken läßt, d.h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann, und ich glaube hiermit etwas zu definieren, was verwandt ist mit dem platonischen *eidos* oder *idea* […]". Překlad: „‚Množstvím' nebo ‚množinou' rozumím totiž obecně každé ‚mnoho', které lze myslet jako jednotu, tj. každý soubor určitých prvků, který může být spojený v jeden celek prostřednictvím nějakého zákona; věřím, že takto definuji něco, co je příbuzné s platónským *eidos* či *ideou* […]." Georg Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen* (Leipzig: Teubner, 1883), 43; „Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung *M* von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von *M* genannt werden) zu einem Ganzen." Překlad: „‚Množinou' rozumíme každé shrnutí *M* určitých dobře odlišených předmětů m našeho názoru nebo našeho myšlení (tyto předměty se nazývají ‚prvky' [množiny] *M*) do jednoho celku." Cantor, „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre," 481.

[33] „Zermelova a Fraenkelova axiomatika […] předpokládá, že univerzum množin vzniká postupně v jednotlivých krocích. V každém kroku je dána množina všech doposud sestrojených množin a nové množiny vznikají jako její části, tedy jako prvky její potence. Můžeme říci, že množinové univerzum vzniká iterováním operace potence." Bohuslav Balcar a Petr Štěpánek, *Teorie množin* (Praha: Academia, 2000), 21.

skládáním a kombinováním konečných množin nemohli nikdy dospět, musí tedy být postulována.

Schéma axiomu vydělení[34] zaručuje, že lze z každé množiny vydělit její podmnožinu takových a jen takových prvků, které splňují určitou formuli $\phi(x)$ daného jazyka, z každé množiny lze tedy vyčlenit do podmnožiny takové prvky, které mají společnou nějakou „vlastnost" popsatelnou daným jazykem. *Axiom potence* pak zaručuje, že ke každé množině lze vytvořit množinu jejích podmnožin. Jsou-li axiomy považovány za to, co konstituuje množiny, nezdá se, že by mělo být nutné považovat za množiny i něco, co není těmito axiomy konstituováno. To ovšem dohromady znamená, že důsledně vzato axiomy ZF chápané jako konstitutivní zavazují jen k existenci takových podmnožin, jejichž prvky jsou nějak společně popsatelné daným jazykem – axiomy nijak nevynucují, aby libovolná jazykem ZF teorie „nepopsatelná" kombinace prvků dané množiny tvořila její podmnožinu; to, že *libovolný* soubor prvků určité množiny nutně představuje množinu (a tedy podmnožinu dané množiny), je ve skutečnosti pouze jakýsi „naivní" předteoretický předpoklad, axiomy ZF by mohly být splněny i v modelu, ve kterém tento předpoklad neplatí. Potenční množina přirozených čísel tedy musí obsahovat třeba množinu všech sudých přirozených čísel, množinu všech mocnin čísla 3, množinu všech prvočísel atd., ale axiomy ZF není nijak zaručeno, že musí obsahovat *jednu každou* nekonečnou kombinaci přirozených čísel. Tedy podobně jako se zdá, že pouze nějaký funkční předpis může stanovit, určit „nekonečnou" posloupnost čísel, i množiny mohou být chápány jako „konstituovatelné" vyčleněním z již existujících množin pouze *pomocí určitého popisu*.

Funkce jsou v dnešní matematice obvykle chápány jako množiny uspořádaných n-tic. Nekonečnou posloupnost čísel od 0 do 9 popsanou pomocí funkce lze tedy chápat jako množinu všech takových uspořádaných dvojic, mezi kterými se vyskytuje pro každé přirozené číslo právě jedna dvojice obsahující toto přirozené číslo na prvním místě, na druhém místě pak libovolné číslo mezi 0 a 9. V důsledku zmíněného chápání axiomatiky jako konstitutivní jsou ovšem teoreticky „konstituovány" pouze takové množiny uspořádaných dvojic, které lze nějak popsat (o tom právě hovoří Wittgenstein – představa nahodilé posloupnosti nedává smysl, k ustavení posloupnosti je potřeba nějaké pravidlo, předpis). Cantor ve svém „naivním" (a sporném) pojetí množin mohl ještě předpokládat, že zmíněné množiny

[34] Namísto axiomu vydělení lze pracovat s obecnějším schématem axiomů nahrazení, které je ovšem trochu méně „názorné".

odpovídající popsatelným i nepopsatelným nekonečným posloupnostem existují nějak nezávisle na svém (případném) způsobu popisu a na jakékoli axiomatice, nicméně (snad) bezesporná axiomatika ZF, právě proto, aby se vyhnula sporu, nevynucuje existenci jakýchkoli množin nad rámec toho, co sama konstituuje, tedy v daném případě nad rámec množin, které je schopna nějakým předpisem vytvořit či vyčlenit z již existujících množin. Potenční množina nekonečné[35] množiny tedy v rámci ZF axiomatiky zdaleka nemusí být tak „veliká", podobně nemusejí ve smyslu ZF axiomatiky existovat všechny množiny „ztvárňující" nekonečné posloupnosti (tedy výše popsaným způsobem obsahující uspořádané dvojice kombinující každé přirozené číslo s právě jednou hodnotou).

Pokud je tedy, zjednodušeně řečeno, oněch nekonečných posloupností tolik, kolik je jejich možných popisů, a možných popisů je, vzhledem k jejich konečnosti a vzhledem ke spočetnosti jazyka, vždy maximálně spočetně nekonečno, mělo by být i oněch (popsatelných) nekonečných posloupností prostě spočetně nekonečno.

I na posloupnosti chápané jako spojené s příslušným předpisem lze ale aplikovat diagonální argument: je-li možných předpisů spočetně mnoho, mělo by být teoreticky možné ony popisy (předpisy funkcí) nějak postupně očíslovat, přičemž jejich číslování bude potenciálně neomezeně stoupat (vždy je možné přidat ještě další nový popis). Pokud aplikujeme myšlenku diagonálního důkazu na tyto očíslované předpisy funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, …, můžeme nadefinovat novou funkci $g(x)$ následujícím předpisem: $g(x) = |f_x(x) - 1|$, kterýžto předpis nám zaručí, že se hodnota funkce g bude pro argument 1 lišit od hodnoty funkce f_1, pro argument 2 lišit od hodnoty funkce f_2 …, pro argument n od hodnoty funkce f_n a tak dále, takže se extenze[36] funkce g liší od extenze každé funkce f_n. Je ovšem třeba si uvědomit, že funkce g není definována nějakým jednoduchým předpisem (jak by se možná mohlo zdát), ale předpisem, který předpokládá využití všech „dosa-

[35] Je potřeba si uvědomit, že třeba každou konečnou množinu přirozených čísel lze jednoznačně „popsat" (zadat) například výčtem, každé přirozené číslo má totiž díky funkci následníka své „jméno"; co nelze vždy zadat, je nekonečná podmnožina množiny přirozených čísel.

[36] „Extenzí" funkce se v zásadě standardně míní množinový objekt obsahující všechny a právě jen příslušné uspořádané dvojice (případně obecněji n-tice) typu $\langle x, f(x)\rangle$, tedy ⟨argument, funkční hodnota funkce f pro tento argument⟩. I když matematici mají obvykle za to, že extenze funkce je prostě totéž co tato funkce sama (funkce tedy není nic jiného než množinový objekt), odlišení extenze funkce od její intenze nebo dejme tomu od jejího způsobu zadání nám například umožňuje hovořit o dvou *různých* funkcích (ve smyslu jejich předpisu) majících *tutéž* extenzi (stejným číslům přiřazujících stejnou hodnotu), jako jsou dejme tomu funkce $f(x) = x$ a $g(x) = (x + 2)^2 - (x - 2)^2 - 7x$.

vadních" předpisů funkcí. Kdybychom ji tedy chtěli zapsat prostým kombinováním funkčního předpisu pro argument 1, (jiného) funkčního předpisu pro argument 2 atd. atd., dostali bychom „nekonečný" (tj. nikdy nedodělaný, neukončitelný) předpis funkce *g*. Jak o tom už byla řeč, předpis funkce g je na jakési metaúrovni (jak o tom mluví Wittgenstein: příslušný předpis se musí opírat o celý systém předpisů, viz pozn. pod čarou 28). Lze mít nějaký konečný předpis, který by byl schopen pro každý argument vyprodukovat funkční hodnotu danou pokaždé jinou funkcí?

5.2 Rekurzivní funkce

V teorii vyčíslitelnosti se pracuje s pojmem tzv. rekurzivní funkce: to je funkce, která je algoritmizovatelná, tj. (přinejmenším teoreticky) nějak vypočitatelná či naprogramovatelná: „Intuitivní pojem efektivně vyčíslitelné funkce je pojem takové funkce, pro kterou existují určitá explicitní pravidla, podle nichž je teoreticky možné spočítat její hodnotu pro jakýkoli daný argument."[37] Jako předpis tzv. *primitivně rekurzivních funkcí* lze použít některé základní jednoduché („primitivní") funkce (*nulovou* funkci, funkci *následníka* $S(x)$ a tzv. funkci *projekce* P_i^k, která z k argumentů vybere ten na i-tém místě), případně jejich složení pomocí algoritmizovatelných pravidel (totiž *kompozice* – nová funkce je určena jako jistá již definovaná funkce aplikovaná na argumenty představované funkčními hodnotami již definovaných funkcí: $h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$; a tzv. *primitivní rekurze* – funkce je definována pomocí již definované funkce tak, že je určena její hodnota pro argument nula a pro argument následníka libovolného argumentu, přičemž je určena pomocí funkční hodnoty tohoto argumentu: $h(0, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ a $h(S(y), x_1, \dots, x_n) = g(y, h(y, x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n)$). Předpisy primitivně rekurzivních funkcí získané ze základních funkcí jejich případnou kombinací pomocí uvedených pravidel tedy představují postupy „efektivního vyčíslení", tedy vypočítání funkční hodnoty pro ten který zadaný argument. Jelikož předpisy funkcí jsou skládány ze spočetného jazyka a samy jsou konečné, bude jich jen spočetně neomezeně mnoho (již vytvořené předpisy lze vždy ještě skládat do delších a delších předpisů), jsou tedy teoreticky očíslovatelné.

[37] „The intuitive notion of an effectively computable function is the notion of a function for which there are definite, explicit rules, following which one could in principle compute its value for any given arguments." George S. Boolos, John P. Burgess, and Richard C. Jeffrey, *Computability and Logic* (Cambridge: Cambridge University Press, 2007), 63.

Máme-li tedy nějaký seznam $f_1(x)$, $f_2(x)$, … předpisů primitivně rekurzivních funkcí, výše uvedenou diagonální metodou se dokazuje, že existuje „antidiagonální“ funkce $g(x)$, která má jinou extenzi než libovolná $f_n(x)$, a tudíž její předpis nemůže být v tomto seznamu obsažen, a tedy není primitivně rekurzivní: totiž například funkce zadaná předpisem $g(x) = f_x(x) + 1$. Vymezení efektivně vyčíslitelných funkcí se proto rozšiřuje – k dosud přijatým pravidlům vytváření primitivně rekurzivních funkcí se přidává ještě tzv. pravidlo *minimalizace* (funkční hodnotou argumentu bude takové nejmenší *y*, které splňuje určitou zadanou podmínku; neexistuje-li takové y, nebude funkce pro daný argument definována[38]), které rozšiřuje okruh vyčíslitelných funkcí na tzv. *částečně rekurzivní funkce* (jichž jsou primitivně rekurzivní funkce pouhou podskupinou). Lze ukázat, že i onu antidiagonální funkci *g* pro primitivně rekurzivní funkce lze předepsat jako částečně rekurzivní funkci: umožňuje to skutečnost, že je možné kódovat jednotlivé znaky a posloupnosti znaků pomocí čísel (mluví se o tzv. Gödelových číslech, jelikož Gödel tuto možnost kódování jazyka využil ve svém slavném důkazu o neúplnosti aritmetiky[39]), funkce *g* tedy pro každý vstupní argument *x*, který zároveň představuje index příslušné funkce, „rozkóduje“ číslo dané funkce (přiřazené příslušnému indexu[40]) a následně, zjednodušeně řečeno, vlastně „simuluje“ příslušnou funkci f_x a vypočítá její funkční hodnotu pro zadaný argument *x*.[41] Tímto způsobem tedy lze, máme-li očíslovanou posloupnost předpisů primitivně rekurzivních funkcí, uvést jednotný konečný předpis funkce fungující tak, že tato funkce pro každý argument *n* najde „výpočet“ *n*-té funkce, kterou je potřeba v daném kroku aplikovat na příslušný argument; pokud tuto funkci upravíme tak, že k vypočtené funkční hodnotě ještě přičte jedničku, bude se jednat o předpis oné antidiagonální funkce.

[38] Zároveň se požaduje, aby funkce byla definována pro každý nižší argument, není-li tedy funkce definována v nějakém *a* menším než *b*, nebude určitě definována ani v *b*.

[39] Kurt Gödel, „Über formal unentscheidbare Sätze der ‚Principia Mathematica‘ und verwandter Systeme,“ *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 (1931): 173–98.

[40] Pro účely diagonálního důkazu předpokládáme, že máme nějaké očíslování funkcí zadané; jinak je myslitelný třeba takový algoritmizovatelný postup očíslování, podle kterého se budou postupně vypisovat delší a delší posloupnosti znaků daného jazyka a testovat, která ze zapsaných posloupností odpovídá přípustnému zápisu primitivně rekurzivní funkce – těmto posloupnostem budou postupně přidělována čísla od 1 výše, takže každému zápisu funkce bude teoreticky připadat nějaké pořadové číslo.

[41] Technické podrobnosti viz např. Walter Dean, „Recursive Functions,“ in *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, zvláště kap. 2.2.2, nebo Vítězslav Švejdar, *Logika, neúplnost, složitost a nutnost* (Praha: Academia, 2002), kap. 2.2.

Částečně rekurzivní funkce ovšem kvůli operaci minimalizace nemusejí být definovány pro jeden každý argument (tj. nemusí být tzv. totální; totální částečně rekurzivní funkce jsou nazývány „obecně rekurzivní" nebo prostě „rekurzivní"), jelikož se může stát, že žádné y splňující určitou podmínku vůbec neexistuje, tedy přirozeně neexistuje ani nejmenší y splňující tuto podmínku. Při užití počítačové analogie si lze takovou funkci představit jako počítačový program, který na určitém vstupu nedospěje k žádnému výstupu. Prakticky to ovšem znamená (a proto ono označení „částečně rekurzivní"), že počítač testuje vyšší a vyšší y, aniž by dospěl k nějakému, které splňuje určenou podmínku: a není jasné, zda k němu „jednoho dne" dospěje, nebo zda takové y vůbec neexistuje a počítač bude pokračovat v hledání dál a dál. Ani ze zadání částečně rekurzivní funkce nelze vždy poznat, zda bude, nebo nebude totální – a lze dokonce dokázat, že určení totálnosti funkce, resp. toho, zda se určitý program někdy zastaví, nelze obecně zjistit rekurzivním, tedy algoritmizovatelným způsobem.[42]

Jsou ovšem některé funkce, o kterých lze dokázat, že nejsou primitivně rekurzivní, zároveň jsou ale totální – například tzv. Ackermannova funkce[43]; podobně i ona antidiagonální funkce g musí být totální, jelikož pro každé n je hodnota $g(n)$ určena hodnotou funkce f_n, která je primitivně rekurzivní, a tedy totální. Existují tudíž funkce, které nejsou primitivně rekurzivní, pouze částečně rekurzivní, přitom jsou ale totální.

Vraťme se nyní zpět k našemu uvažování nekonečných posloupností určených nějakou algoritmizovatelnou funkcí. Nekonečná posloupnost přirozeně nemůže obsahovat žádné „mezery" (musí mít nějakou hodnotu na prvním místě, na druhém místě, …), funkce ji určující tedy musí být totální. Z předchozího plyne, že některé posloupnosti (například ona antidiagonální) mohou být určeny funkcí, která není primitivně rekurzivní, ale jen částečně rekurzivní, předpisy primitivně rekurzivních funkcí tedy nepokrývají všechny algoritmizovatelné nekonečné posloupnosti. Jako je možné algoritmicky vytvářet seznam přepisů primitivně rekurzivních funkcí, je možné algoritmicky vytvářet i seznam předpisů částečně rekurzivních funkcí – každý předpis částečně rekurzivní funkce je konečný a sestavený podle přesně daných pravidel; není ale možné algoritmicky vytvořit seznam *právě a jen* předpisů totálních částečně rekurzivních (tj. rekurzivních) funkcí, jelikož jejich totálnost nelze ze samotného předpisu poznat. Seznam předpisů všech funkcí, které určují nekonečnou posloup-

[42] Viz např. Dean, „Recursive Functions," zvláště kap. 3.2.
[43] Viz např. Boolos, Burgess, and Jeffrey, *Computability and Logic*, 84–85.

nost (tj. rekurzivních funkcí) lze tedy získat jen nepřímo, jakožto obsažený ve (spočetném!) seznamu předpisů všech částečně rekurzivních funkcí.

Přitom uvažujeme-li seznam všech částečně rekurzivních funkcí, diagonální argument v tomto případě tak úplně nefunguje: Pokud totiž uvažujeme diagonálu posloupností určených částečně rekurzivními funkcemi, může se stát, že diagonála na některém řádku není definována, tedy pro jistou funkci f_n není hodnota $f_n(n)$ určena – ale není-li funkční hodnota $f_n(n)$ definována, není definována ani funkční hodnota antidiagonální funkce $g(n) = f_n(n) + 1$. A není to tak jednoduché, že by bylo možné přiřadit $g(n)$ jakoukoli číselnou hodnotu, pokud by $f_n(n)$ nebyla definována (pak by se posloupnost určená funkcí g jistě lišila od posloupnosti dané funkcí f_n na n-tém místě), jelikož funkce g by opět měla být zadána nějakým algoritmizovatelným předpisem, ale jak bylo řečeno, žádný algoritmus obecně rozhodující, kdy $f_n(n)$ není definována, neexistuje.[44] Když si opět vypomůžeme počítačovou analogií, program vypočítávající hodnotu f_n pro argument n běží a běží a není jasné, zda někdy přijde s nějakým výsledkem, nebo poběží stále dál. Má-li tedy být antidiagonální funkce g zadána nějakým *algoritmizovatelným* předpisem (tedy být alespoň částečně rekurzivní), může se stát, že bude pro nějaký argument n nedefinována, a tudíž se pak může shodovat s nějakou funkcí f_n v daném seznamu, která rovněž není pro argument n definována.[45] Máme-li tedy seznam částečně rekurzivních funkcí, může být předpis jeho antidiagonály v tomto seznamu obsažen, aniž by to znamenalo nějaký spor.

Co tedy z toho všeho plyne? Můžeme mít *spočetný* seznam předpisů částečně rekurzivních funkcí. Některé extenze těchto funkcí představují nekonečné posloupnosti čísel, tedy onen teoretický nekonečný desetinný rozvoj reálných čísel; některé ovšem nikoli, jelikož některé jejich „členy" nemusejí být definovány. I když nelze nějakým algoritmizovatelným způsobem vybrat právě ty částečně rekurzivní funkce, jejichž extenze představují příslušné posloupnosti (tedy příslušné funkce jsou totální), seznam všech rekurzivních funkcí je součástí *spočetného* seznamu všech částečně rekurzivních funkcí, tedy z tohoto hlediska není důvod považovat ho za nespo-

[44] Stručný, leč přehledný výklad dané problematiky lze nalézt na https://web.mat.bham.ac.uk/R.W.Kaye/computability/diagforprmachines.html, navštíveno 24. 1. 2023.

[45] Srovnej: „we can see that the partial computable functions differ from the primitive recursive functions in admitting a universal function within the same class but at the same time giving up the requirement that the functions in the class must be total." Dean, „Recursive Functions," kap. 3.2.

četný.[46] Přijmeme-li tedy předpoklad, že nekonečná posloupnost musí být zadána nějakým pravidlem, (algoritmizovatelným) předpisem funkce, je těchto předpisů jen spočetně mnoho, respektive tyto předpisy jsou všechny obsaženy ve spočetném seznamu a případný antidiagonální předpis tohoto seznamu může být také zahrnut v tomto seznamu, aniž by to vedlo ke sporu. Cantor tudíž musí nejprve postulovat nekonečné řady symbolů jako předem dané a na způsobu zadání zcela nezávislé entity, aby mohl dovést svůj diagonální argument ke sporu.[47] Pokud tento postulát nepřijmeme, Cantorův důkaz ukazuje maximálně to, že primitivně rekurzivní předpisy funkcí nestačí pro popsání nekonečných posloupností, je potřeba brát v potaz i (některé) částečně rekurzivní předpisy.

Zároveň ovšem na základě právě uvedeného se zdá platit následující: Je-li teoreticky možné očíslovat všechny částečně rekurzivní funkce, je možné vytvořit (nekonečnou) posloupnost číselných kódů těchto funkcí. Některé z těchto uspořádaných kódů kódují rekurzivní funkce – nelze ovšem algoritmicky rozhodnout, které z nich to jsou. Existuje tedy nějaká jednoznačně určená posloupnost čísel (totiž kódů právě a jen obecně rekurzivních funkcí),

[46] Srovnej: „Now, due to their schematic or *syntactic* characterization, you can easily make a list of all partial recursive functions. This practical or pretheoretical enumerability is further identified with so-called recursive enumerability or enumerability via a recursive function, where the nonempty set is called *recursively enumerable* if it is in the range of some recursive function. In the enumeration of all partial recursive functions, all recursive functions are contained by definition, building enumerable totality in Cantor's sense, whereby a subset of an enumerable set is enumerable. But in our algorithmic, computable sense this enumerability is only fictitious, because there is no effective way of separating the non-total functions from the total ones, and hence, recursive functions are (recursively) non-denumerable. […] The (recursive) non-denumerability of the continuum has this time obviously nothing to do with its ‚size', which is clearly denumerable in Cantor's sense, and, as a result, we cannot repeat his argument to get bigger and bigger cardinalities. So, we are not leaving the grounds of the nameable entities at all." Kolman, „Continuum, Name and Paradox," 361–62.

[47] Například i Lorenzen upozorňuje na to, že se ve skutečnosti jedná o značně „vágní" postulát, který ovšem byl přijat z praktických důvodů: „Radikální rozdíl mezi konečnými a nekonečnými desetinnými zlomky se již předem stírá. Konečný desetinný zlomek lze zapsat, nekonečný nikdy. Hovořit o posloupnosti nekonečně mnoha číslic je tedy, pokud ne zcela nesmyslné, tak přinejmenším velmi vágní. […] ‚Řešení' problému těchto paradoxů [teorie množin] spočívající v zákazu aktuálně nekonečných množin bylo nasnadě, ale nebylo přijatelné, dokud se nevědělo, jak přesto zachovat to podstatné z klasického (novověkého) infinitesimálního počtu. Právě v 19. století se totiž zdálo, že teorie infinitesimálních procesů, jako jsou derivace a integrace, stojí poprvé na pevném základě – a to díky definici reálných čísel prostřednictvím ‚libovolných' posloupností či množin racionálních čísel." Paul Lorenzen, „Aktuální nekonečno v matematice," in *O špatném nekonečnu*, eds. Vojtěch Kolman a Robert Roreitner (Praha: Filosofia, 2013), 403–4.

která není zadatelná nějakým algoritmizovatelným předpisem. To se zdá být v rozporu s předpokladem, že nekonečné posloupnosti nejsou nějak samy od sebe, ale musejí být zadány nějakým pravidlem či předpisem.

Z toho lze ale vyvodit různé závěry: buď jsou nekonečné posloupnosti jakési platónské matematické entity existující nezávisle na svém případném zadání (popisu, předpisu), přičemž jen malou část z nich jsme schopni nějakým způsobem vymezit, drtivá část (nespočetná) je ovšem mimo dosah našich výrazových a označovacích možností. Nebo mají naše výrazové a označovací možnosti ten specifický rys (daný tím, že jednak umožňují odkazovat i samy k sobě, jednak jsou z povahy věci „nevyčerpatelné“), že jsou schopny vzít v potaz vše dosud označené jako celek a odkázat k něčemu, co je definováno jen na základě tohoto celku jako takového (jak o tom bude ještě řeč v následující kapitole): tak je možné například definovat nekonečnou posloupnost, která je vymezena pomocí určitého vztahu ke všem dosud označeným nekonečným posloupnostem. Tím způsobem vlastně „transcendujeme“ ony výrazové a označovací možnosti a dospíváme k novým, umožněným jen na základě dosud uskutečněného označení. Všimněme si, že i ona nekonečná řada kódů rekurzivních funkcí je nějakým způsobem (byť nealgoritmickým) vymezena, určena v jazyce, přičemž je pro její vymezení třeba mít nějak „hotové“ a zakódované *všechny* předpisy rekurzivních funkcí. Nejedná se tedy o žádnou nahodilou řadu, jejíž představu Wittgenstein zpochybňuje.

6. Více předpokladů

Stejně jako je pro mnohé matematiky (přinejmenším od dob Cantora) přijatelná představa čísla (teoreticky) reprezentovatelného zápisem *nekonečné* řady číslic, je pro ně přijatelná i představa „aktuálního nekonečna“, hotové množiny objektů, kterých je nekonečně mnoho. Druhá část Cantorova důkazu tedy pracuje právě s takto chápanými nekonečnými množinami a možností vzájemně jednoznačného zobrazení mezi nimi. Cantor ukazuje, že v některých případech, jako je třeba přiřazování nekonečné množiny její vlastní potenci, by případná existence vzájemně jednoznačného zobrazení mezi nimi vedla k možnosti konstruovat takovou podmnožinu výchozí množiny, která by principiálně nemohla mít svůj vzor mezi prvky výchozí množiny: to vede Cantora k závěru, že je třeba odmítnout možnost vzájemně jednoznačného zobrazení mezi množinou a její potencí.

Použitá rozšířená „diagonální“ metoda konstrukce oné bezprizorní množiny je ovšem poněkud ošidná a v některých specifických případech vede k jinému závěru, než který na jejím základě ve svém důkazu vyvozuje Cantor. Uvedeme si postupně tři příklady. První příklad se velmi podobá tomu Cantorovu, jenom bere v potaz množiny obecně. V teorii množin je již dlouho standardně přijímáno pojetí, že možnými prvky množin jsou zase jen množiny (přičemž se obvykle vychází od prázdné množiny jako základního stavebního kamene), neberou se tedy v úvahu nějaké takové prvky, které by nebyly množinami. Při tomto pojetí lze tedy každou množinu M chápat jako určenou zmiňovanou charakteristickou funkcí, tj. funkci, která každé *množině* přiřadí 1 v případě, že tato množina je prvkem množiny M, 0 v případě, že tomu tak není. Pro lepší názornost si můžeme představit množiny vypsané v tabulce, kde číslo v buňce v řádku β a sloupci α určuje, zda množina m_α je či není prvkem množiny m_β (přičemž je třeba brát v potaz, že představa všech množin vypsaných do obyčejné tabulky je při cantorovské rozbujelosti množin poněkud nedostačující – jedná se jen o určitou pomůcku):

	m_a	m_b	m_c	
m_a	0	0	1	…
m_b	1	0	0	…
m_c	0	0	0	…
…	…	…	…	…

Tabulka v souladu s Cantorovým diagonálním argumentem nemůže obsahovat svoji antidiagonálu, existuje tedy řádek, který v tabulce není uveden, a tabulka tudíž nemůže být „čtvercová". To ovšem nedává moc smysl: má-li tabulka v záhlaví i v prvním sloupci tutéž posloupnost, prostě *musí* být čtvercová. Proč v ní ale není onen „antidiagonální řádek", který přece neproblematicky vymezuje jistou množinu, jež ovšem v příslušném seznamu není a dokonce nemůže být obsažena? Lze namítnout, jak již bylo naznačeno, že množin je přece nějak podstatně víc, jsou nespočetné, tedy nedává smysl představa jejich srovnání do seznamu, do uvedené tabulky. Na množiny lze ovšem aplikovat i druhou, obecnější část Cantorova důkazu: Nechť g je nějaké vzájemně jednoznačné zobrazení souboru všech množin na sebe sama. Uvažujme množinu N všech množin takových, které nejsou prvkem svého obrazu v tomto zobrazení (tato množina přirozeně může být i prázdná). Tato množina také musí mít svůj vzor v zobrazení g, dejme tomu m_n. Ovšem nyní v souladu s Cantorovými úvahami dostáváme spor, neboť je-li m_n prvkem svého obrazu $g(m_n)$, tj. množiny N, musí pro něj platit v souladu se zadáním množiny N, že $m_n \notin N$, tj. $m_n \notin g(m_n)$, a není-li n prvkem svého obrazu $g(m_n)$, musí v souladu se zadáním N platit, že $m_n \in N$, tj. $m_n \in g(m_n)$.

(Ne)překvapivě tento potenciální spor ovšem nevedl k závěru, že tedy nemůže existovat vzájemně jednoznačné zobrazení mezi souborem všech množin a souborem všech množin, a tudíž *je množin více než množin*: to se totiž dá dost těžko tvrdit, jelikož se zdá, že každý soubor lze vzájemně jednoznačně zobrazit sám na sebe, přinejmenším již zmíněným zobrazením identity – každému prvku přiřadíme tento prvek samotný. Takže je-li každé množině přiřazena ona sama, tj. pro každou množinu m bude platit $g(m) = m$, mělo by se jednat o vzájemně jednoznačné zobrazení souboru všech množin na soubor všech množin (a bez relace identity by se teorie množin těžko obešla).

Jelikož v tomto případě tedy sotva může být zpochybňována existence vzájemně jednoznačného zobrazení souboru na sebe sama, je možné zpochybnit způsob konstrukce oné „antidiagonální“ množiny všech těch množin, které nejsou prvkem svého obrazu – takováto množina je očividně problematická, jelikož zároveň nemůže a musí obsahovat svůj vzor (v případě zobrazení identity $g(m) = m$ se jedná o známou Russellovu paradoxní množinu všech množin, které nejsou prvkem sebe samých[48] – ta by totiž zároveň měla a neměla obsahovat sebe samu); případně lze zpochybnit, že by bylo možné shrnout všechny množiny do nějakého hotového, jednotného celku, tedy že by soubor všech množin byl sám množinou, a tedy by pro něj měly platit standardní množinové vztahy, například že je relací identity zobrazen vzájemně jednoznačně sám na sebe. Axiomatiky teorie množin, jako je ZF, které později vznikaly právě proto, aby nějak blokovaly paradoxy cantorovské naivní teorie množin, zvolily právě zmíněný přístup a odmítly některé soubory jako vhodné pro aplikování běžných množinových postupů (třeba zobrazení na sebe sama) – opřely se o tezi, že některé soubory (v zásadě všechny soubory, jejichž předpoklad by vedl k nějakému sporu) nejsou ve skutečnosti množiny, nýbrž tzv. vlastní třídy. Pro vlastní třídy neplatí axiomy pro množiny, vlastní třídy nemohou být ničeho prvkem, nemají potenční množinu atp. V ZF axiomatice, jak už o tom byla řeč, se za množiny považují jen soubory axiomaticky „konstruovatelné“ z výchozích množin na základě výše zmíněné představy kumulativní hierarchie, takže ty soubory,

[48] Viz dopis Russella Fregovi v Gottlob Frege, *Wisseschaftliche Briefwechsel* (Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1976), Russell an Frege, XXXVI/1, 16. 6. 1902, 211. To, že „antidiagonála“ představuje množinu všech množin, které nejsou prvkem sebe samých, ukazuje dobře předcházející ilustrativní tabulka.

ke kterým nelze takto dospět (a jejichž existence není zaručena axiomaticky, jak je tomu u nekonečné množiny), nejsou považovány za množiny, nýbrž za vlastní třídy. Výsledkem je, že v ZF teorii nelze uvažovat soubor všech množin jako množinu, a tedy nelze uvažovat ani jeho zobrazení na sebe sama, čímž je výše uvedená antidiagonální úvaha zablokována.

Aplikace cantorovského diagonálního postupu tedy v tomto případě vedla k jinému závěru, než v Cantorově klasickém důkazu: namísto aby byla popřena možnost existence vzájemně jednoznačného zobrazení, axiomaticky se zabránilo možnosti oné „diagonální" konstrukce, tedy nepřipustilo se, že by bylo možné pracovat se souborem všech množin jako s množinou, zobrazovat ho na sebe sama a pak uvažovat „antidiagonálu" tohoto zobrazení a případně onu problematickou množinu všech množin, které neobsahují samy sebe.

Uvažme ještě jiný příklad. Prvočísel je nekonečně mnoho, a jelikož představují podmnožinou přirozených čísel, mělo by jich být maximálně spočetně nekonečně mnoho, tedy mělo by existovat vzájemně jednoznačné zobrazení mezi prvočísly a přirozenými čísly (jinými slovy, prvočísla by mělo být lze očíslovat). Mějme nyní *libovolné* takové zobrazení g a uvažujme všechna taková prvočísla, která nedělí svůj obraz, tj. všechna $p_i \nmid g(p_i)$.[49] Uvažme nyní jejich součin, řekněme P. Ten by jakožto přirozené číslo měl mít v zobrazení g svůj vzor, označme ho p_P. Jestliže ovšem p_P dělí P, znamená to, že jelikož je prvočíselný rozklad jednoznačný, musí být p_P jedním z p_i, a tudíž by nemělo dělit svůj obraz, tj. P. A pokud p_P nedělí P, znamená to, že splňuje výběrové kritérium pro p_i, tedy je jedním z činitelů čísla P, a musí ho proto dělit.

Ani v tomto případě to ovšem nevede k závěru, že vzájemně jednoznačné zobrazení mezi prvočísly a přirozenými čísly neexistuje, ale odmítne se ona „antidiagonální" konstrukce: násobením všech vzorů, které nedělí své obrazy, nemusíme dospět k přirozenému číslu (tj. potenciálnímu obrazu zobrazení g) - oněch vzorů může[50] být nekonečně mnoho, a součin neko-

[49] Nějaké takové p_i určitě bude existovat, jelikož není možné, aby *každé* prvočíslo ve vzájemně jednoznačném zobrazení na přirozená čísla dělilo svůj obraz: například pro všechna přirozená čísla, která jsou mocninami třeba čísla 3 (tj. 3, 9, 27 atd.), je mezi prvočísly k dispozici jen jediný potenciální vzor, který by je dělil, totiž číslo 3; to ale může být vzorem pouze pro jedno přirozené číslo, tudíž všechny ostatní mocniny tří už nemohou být v daném zobrazení dělitelné svým vzorem. Z uvedené úvahy zároveň plyne, že takových p_i bude dokonce nekonečně mnoho – na každé prvočíslo p_i připadá nekonečné množství mocnin tohoto prvočísla, ke kterým však existuje jen jediný potenciální vzor, který by je dělil, totiž samo prvočíslo p_i.

[50] Ve skutečnosti jich *musí* být nekonečně mnoho, viz předchozí poznámka pod čarou.

nečně mnoha přirozených čísel (větších než 1) sám není považován za přirozené číslo. Opět je tu odmítnuta ona konstrukce příslušného objektu, stejně jako „být množinou neobsahující samu sebe" je prohlášeno za nepřípustné kritérium pro *konstrukci množiny*, ani vynásobení nekonečně mnoha přirozených čísel větších než 1 není považováno za vedoucí ke *konstrukci přirozeného čísla*. V obou případech je tedy odmítnuta nikoli možnost vzájemně jednoznačného zobrazení, ale možnost oné antidiagonální konstrukce příslušného „objektu" (množiny či přirozeného čísla). Russell tuto metodu „řešení", totiž odmítnutí takových (komplikovaných) konstrukcí, které by vedly k určitému rozporu, jako nepřípustných, označuje jako „cikcak teorii" a považuje ji za poněkud nedostačující.[51]

Na tomto příkladu je také dobře patrné, že rozdíl mezi (jakkoli velikým) počtem a nekonečnem je zcela zásadní: postupným násobením přirozených čísel (větších než 1) se dostaneme k větším a větším číslům, vždy však ke konkrétnímu konečnému číslu. Můžeme součin násobit dál a dál, nikdy se tak nedostaneme mimo systém přirozených čísel. Pokud ovšem prohlásíme, že jsme toto násobení provedli *nekonečněkrát* (co přesně to vlastně znamená?), najednou „vypadneme ze systému" přirozených čísel, už nedostaneme žádný číselný výsledek. Nekonečno nelze chápat jako jakési prodloužené či aproximované konečno, nýbrž jedná se o zcela novou kategorii.[52] Podobně lze tedy namítnout, že definujeme-li ono nové antidiagonální číslo tak, že se na prvním desetinném místě liší (třeba o 1) od čísla a_1, na druhém o 1 od čísla a_2, … , na n-tém od čísla a_n, … atd., zadali jsme sice hodnotu n-té číslice desetinného čísla pro jisté n, ale nijak jsme se nedostali dál, přes hranici nekonečna – ani ono „magické" ‚atd.' nám nezajistí proniknutí do jiné kate-

[51] „Zigzag Theory", srovnej: „We may decide that all ordinary straightforward propositional functions of one variable determine classes, and that what is needed is some principle by which we can exclude the complicated cases in which there is no class. In this view, the state of things is like that in the differential calculus, where every commonplace continuous function has a derivative, and only rather complicated and recondite functions have to be excluded." Sám má ovšem o aplikování tohoto řešení trochu pochyby: „But hitherto, in attempting to set up axioms for this theory, I have found no guiding principle except the avoidance of contradictions; and this by itself, is a very insufficient principle, since it leaves us always exposed to the risk that further deductions will elicit contradictions." Bertrand Russell, „On Some Difficulties in the Theory of Transfinite," *Proceedings of the London Mathematical Society* 2–4, no. 1 (1907): 37–39.

[52] Srovnej: „Nesmysl začíná častou představou, že by velké číslo bylo nekonečnu přece jen blíže než malé. Nekonečno – jak jsme řekli – konečnu nekonkuruje. Je tím, co nevylučuje z podstaty žádné konečno." Wittgenstein, „Gramatika nekonečna," § 138, 548.

gorie.[53] Postupným přidáváním číslic desetinného rozvoje nám pouze roste délka číselné řady, vždy je ovšem konečná. Cantor musí *postulovat* existenci nekonečné řady, aby mohl prohlásit, že dospěl ke sporu. A ZF axiomatika teorie množin, která má odstranit spornost Cantorova systému, musí, jak jsme viděli, zavést speciální axiom rovněž postulující nekonečnou množinu, jelikož „kumulativní" metodou se od konečných množin k nekonečnu nikterak nelze dostat.

Zkusme si uvést ještě jeden příklad, tentokrát nikoli z oblasti matematiky, ale z oblasti přirozeného jazyka. Jazyk disponuje konečným počtem smysluplných výrazů, každá věta musí obsahovat jen konečný počet těchto výrazů, všech vět v jazyce je tedy jen *potenciálně* neomezeno („nekonečno") v tom smyslu, že vždy lze vytvořit ještě další novou větu k již formulovaným. Vět je tudíž spočetně mnoho, lze je tedy teoreticky očíslovat.[54] Kdybychom ovšem měli věty očíslované, tj. „pojmenované", v přirozeném jazyce by nám nic nebránilo používat tato jména uvnitř jazyka – jako jsme v případě vzájemně jednoznačného zobrazení *g* definovali „problematickou" množinu všech vzorů, které nejsou prvkem svého obrazu, právě pomocí tohoto přiřazení *g*, můžeme analogicky formulovat větu, která už předpokládá ono očíslování jednotlivých vět, třeba říci, že „Věta s číslem 10 je pravdivá"; také ale můžeme říci: „Věta s číslem přiřazeným této větě je nepravdivá", tedy ona možnost mluvit v jazyce o větách tohoto jazyka a vyjadřovat se k jejich

[53] Srovnej: „Ich erfasse eine unendliche Strecke auf andere Weise als eine endlose. Der Satz über sie kann nicht durch ein endlos gedachtes Schreiten verifiziert werden, sondern nur mit einem Schritt." Překlad: „Nekonečnou cestu vnímám jiným způsobem než cestu bez konce. Věta o ní nemůže být verifikována bez konce pokračujícími myšlenými kroky, nýbrž pouze jedním krokem." Wittgenstein, *Philosophische Bemerkungen*, § 123; „Aber ein sukzessives Erfassen ist schon möglich nur führt es eben nicht zur Gesamtheit. Diese liegt: nicht auf dem Weg den wir schrittweise gehn, & nicht: am unendlich fernen Ende dieses Weges. (Das alles heißt nur ‚ε(0) · ε(1) · ε(2) · u.s.w.' ist nicht das Zeichen eines logischen Produkts.)" Překlad: „Postupné uchopování je možné, pouze nevede k totalitě; ta se nenachází ani na cestě, kterou krok za krokem procházíme, ani na nekonečně vzdáleném konci této cesty. (To vše znamená pouze to, že ‚ε(0) . ε(1) . ε(2) . atd.' není označením logického součinu.)" Ludwig Wittgenstein, Interactive Dynamic Presentation (IDP) of Ludwig Wittgenstein's Philosophical Nachlass http://wittgensteinonline.no, Ms-113,75v.

[54] Dokonce je teoreticky možné je očíslovat takovým způsobem, že příslušné číslo věty danou větu zároveň jednoznačně určuje, kóduje: tedy využít již zmíněnou tzv. gödelizaci jazyka, totiž přiřazení různých čísel výrazům jazyka, kterých je konečně, a kódování jednotlivých posloupností těchto čísel výrazů do jediného jednoznačně určeného čísla.

pravdivosti či nepravdivosti již vede k možnosti formulovat paradox lháře, a tedy ke „spornosti“ jazyka (jak to chápe Tarski[55]).

Pokusme se ale zachovat analogii s diagonální metodou. Některé věty mohou něco říkat o jiných větách, třeba „Věta ‚Sníh je bílý‘ je česky“ – v tomto případě tato věta, řekněme V_n, vypovídá něco o větě „Sníh je bílý“, řekněme V_m. Přirozeně lze vypovídat něco i o více větách (třeba „Věty ‚Sníh je bílý‘ a ‚Saze jsou černé‘ jsou česky“), dokonce o potenciálně nekonečně mnoho větách („Všechny věty o sudém počtu slov jsou nepravdivé“). Uvažme čtvercovou tabulku, ve které jsou v záhlaví i v prvním sloupci uvedeny věty V_1, V_2, V_3, … v pořadí svého očíslování. V buňkách tabulky pak budou jedničky a nuly podle toho, zda věta odpovídajícího řádku vypovídá, či nevypovídá o větě příslušného sloupce. Takže kdyby například *n*-tý řádek tabulky měl předznamenanou zmíněnou větu V_n „Věta ‚Sníh je bílý‘ je česky“, v buňce v *m*-tém sloupci pod větou V_m „Sníh je bílý“ by byla jednička, pod ostatními větami by byly nuly. Řada vět nevypovídá o žádné větě či větách, v tabulce tedy bude množství stejných řádků sestávajících ze samých nul, to ovšem nemá u nekonečné tabulky na diagonální metodu žádný vliv. Uvážíme-li diagonálu této tabulky a představíme si, že je jedním z řádků tabulky, bude mít tento řádek jedničky u těch vět, které nějak vypovídají samy o sobě (třeba „Tato věta je česky“), u ostatních bude mít nuly. Tento řádek by tedy patrně odpovídal třeba větě „Všechny věty, které vypovídají samy o sobě, jsou formulovány v jazyce“ (přičemž je zde podstatný pouze subjekt věty, tj. o kterých větách se vypovídá, predikát je v zásadě libovolný, mohli bychom tedy vybrat řadu jiných vhodných příkladů[56]) – o té lze říci, že vypovídá právě o těch větách, které vypovídají samy o sobě. Antidiagonála by pak patrně odpovídala třeba větě „Všechny věty, které nevypovídají samy o sobě, jsou formulovány v jazyce“, označme tuto větu prostě jako „V“. Otázkou nyní je, zda by věta V vůbec teoreticky mohla být v tabulce (jelikož se jedná o antidiagonálu, v dané tabulce by se vyskytovat neměla, tabulku by ovšem mělo jít přeskládat, například dát větu V hned jako první řádek tabulky; diagonála tabulky by se tak změnila, antidiagonální argument by pak platil dále pro novou antidiagonálu). Co by ovšem měla věta V v buňce pod větou

[55] Alfred Tarski, „Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen,“ *Studia Philosophica* 1 (1935): 261–405 a Alfred Tarski, „The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics,“ *Philosophy and Phenomenological Research* 4 (1944): 341–76.

[56] Uvědomme si, že tu nejde o to, zda je věta pravdivá, či nepravdivá, ale zda vypovídá o příslušných sebereferujících větách. *Každá* věta s kvantifikátorem „všechny věty, které vypovídají samy o sobě“ bude odpovídat stejnému řádku tabulky, totiž takovému, který je totožný s diagonálou. Bylo již řečeno, že se v tabulce budou často opakovat stejné řádky.

V? Vypovídá sama o sobě, nebo nevypovídá? Pokud vypovídá, měla by nevypovídat, jelikož se týká jen všech takových vět, které nevypovídají samy o sobě. Pokud nevypovídá, měla by vypovídat, jelikož se právě vztahuje ke všem větám, které nevypovídají samy o sobě. Zdá se, že samo zvažování, zda příslušná věta V vypovídá, či nevypovídá sama o sobě, vede k problematickému závěru, lhostejno, zda věta V odpovídá antidiagonále či nikoli. Přitom se nezdá, že by na samotné antidiagonále jakožto posloupnosti nul a jedniček bylo něco sporného – problematické je zadání (v tomto případě příslušná věta), které antidiagonále nějak odpovídá.

Na tomto příkladu je opět vidět, že možnost sestrojení antidiagonály ještě nevede k jednoznačnému závěru, že tabulka tudíž nemůže být čtvercová – zrovna v tomto případě opět *musí* být čtvercová, jelikož záhlaví i první sloupec tabulky tvoří tatáž posloupnost vět. Co je tedy třeba odmítnout jako nesprávný předpoklad? Spočetnost vět jazyka, takže nemá úplně smysl mluvit o nějaké tabulce? Ovšem věty jakožto principiálně konečné posloupnosti výrazů spočetného jazyka by měly být spočetné, navíc antidiagonální argument by měl fungovat obecně, tedy i pro nespočetné množiny (viz druhá část Cantorova důkazu): mohli bychom předpokládat libovolné vzájemně jednoznačné zobrazení vět na sebe samé, dejme tomu g, uvažovat větu „Všechny věty, které nevypovídají o svém vzoru v daném zobrazení *g*, jsou formulovány v jazyce" a ptát se, zda tato věta vypovídá o svém vzoru, nebo nikoli – opět dospějeme ke sporu. Nebo má být odmítnut předpoklad, že „antidiagonální věta" je větou (podobně jako standardní teorie množin odmítá považovat *množinu všech množin neobsahujících sebe samé* za množinu)? Zdá se ale, že věta „Všechny věty, které vypovídají samy o sobě, jsou formulovány v jazyce" (V') je větou, proč by tedy věta „Všechny věty, které nevypovídají samy o sobě, jsou formulovány v jazyce" neměla být? Problematický se zdá být fakt, že věty tohoto druhu jsou vlastně formulovány na metaúrovni, mluví o všech větách jazyka, zároveň tím ale mluví i samy o sobě, tedy jsou samy součástí i oné základní úrovně, o níž je řeč. Diagonální věta V' i antidiagonální věta V se vztahují na *všechny* věty určitého druhu, je tedy legitimní se ptát, zda i ony samy jsou tohoto druhu, zároveň ovšem věta V vymezuje věty, ke kterým se vztahuje, jako právě ty, ke kterým se nevztahuje (o nichž nevypovídá), což v jejím případě vede ke sporu. Podobně by mohl být v Cantorově diagonálním důkazu považován za problematický už způsob *zadání* příslušného „antidiagonálního řádku": jsou-li *všechna* reálná čísla v daném intervalu vyjmenována v příslušném seznamu (to je výchozí předpoklad), způsob konstrukce „antidiagonálního čísla" si vynucuje, že se toto číslo musí lišit i samo od sebe (jelikož by se jakožto číslo z daného intervalu mělo v seznamu někde vyskytovat).[57] Zároveň nelze úplně říci, že toto problematické zadání je jen *reductio ad absurdum* původního předpokladu možnosti vytvořit vyčerpávající seznam nekonečných posloupností (tj. možnosti vzájemně jednoznačného přiřazení nekonečných posloupností a přirozených čísel), jelikož, jak bylo ukázáno, i těžko zpochybnitelný předpoklad možnosti vzájemně jednoznačně zobrazit soubor (ať už všech množin, či všech vět) sám na sebe vede k obdobně problematické antidiagonální konstrukci.

Povšimněme si, že cantorovská diskutabilní antidiagonální konstrukce závisí na několika podstatných předpokladech: Jedním je existence *aktuálně* nekonečného souboru, tedy něčeho, co na rozdíl od potenciálního nekonečna, které neomezeně umožňuje další a další přidávání či zvětšování, je již hotové, ukončené, vše již bylo „přidáno“ a nic dalšího přidat nelze (např. neexistuje už žádné přirozené číslo mimo množinu přirozených čísel). Jen za tohoto předpokladu je možné říci, že nás uvedená antidiagonální konstrukce dovede k *hotovému*, konkrétnímu číslu, které je vyjádřeno (resp. bylo by vyjádřeno, kdyby něco takového bylo možné) nekonečnou, nicméně hotovou, dodělanou řadou číslic. Naopak chápeme-li nekonečno jako potenciální, zákonitě nemůže tabulka obsahovat všechny posloupnosti číslic, samozřejmě vždy existuje ještě další řádek, který lze k tabulce přidat – to je podstata *potenciálně* neomezené tabulky. Podobně je potřeba v obecnější části Cantorova důkazu předpokládat existenci i aktuálně nekonečných množin a zahrnout je do systému, jelikož jinak by se mohlo stát, že oněch vzorů, které nejsou prvkem svého obrazu, by bylo neomezeně mnoho, takže by jejich celý souhrn „vypadl“ ze systému a důkaz by nebyl platný (nesplnění tohoto předpokladu vede k možnosti odmítnout výše zmíněný analogický příklad s prvočísly – nekonečný součin prvočísel přestává být součástí systému). Předpoklad aktuálního, hotového nekonečna ovšem není nějak nezpochybnitelný, jedná se spíše o postulované východisko.

S předpokladem existence aktuálně nekonečných množin souvisí ještě jeden předpoklad: zatímco, jak bylo řečeno, například nekonečněkrát opakované násobení či sčítání přirozených čísel již nevede k přirozenému číslu, nekonečněkrát opakované operace s množinami vedou opět k množinám.

[57] Problematiku úrovní vypovídání a vymezování něčeho vzhledem k celku vymezení (problém „vicious circle” v definování) řešil v reakci na paradoxy už Russell, který ve snaze o blokování těchto problémů zavedl svoji *teorii typů*, tj. odlišení různé úrovně objektů a o nich vypovídaných predikátech, případně množin (Alfred N. Whitehead and Bertrand Russell, *Principia Mathematica*, 3 volumes (Cambridge: Cambridge University Press, 1910, 1912, 1913)).

Kupříkladu to, že soubor všech podmnožin libovolné nekonečné množiny je opět množinou, je předpoklad (později v axiomatikách vtělený do axiomu potence), který zajišťuje, že ani při uvažování nekonečně mnoha všech možných kombinací prvků nekonečné množiny shrnutých do jednoho celku neopustíme oblast množin.

Další podmínkou je, že *uvnitř* systému máme k dispozici taková individua, která nějakým způsobem „kódují“ či „pokrývají“ dokonce nekonečně mnoho jiných individuí ze systému: můžeme uvažovat množinu slučující dohromady nekonečně mnoho vzorů, které nejsou prvky svého obrazu, jež se v systému chová jako individuum – jakožto takové je přiřazované ve vzájemně jednoznačném zobrazení a vyžaduje svůj vzor. Podobně lze vytvořit posloupnost představující jedno konkrétní číslo, která je ve vztahu ke *každému* číslu v systému, totiž v tom vztahu, že se od každého z nich liší na tom desetinném místě, jaké je pořadí daného čísla v seznamu. Tuto podmínku splňuje i zmíněný příklad s prvočísly: součin všech prvočísel, která nedělí svůj obraz, představuje, díky jednoznačnosti prvočíselného rozkladu, číslo „kódující“ všechna příslušná prvočísla (respektive představuje je v případě, když je oněch prvočísel konečně mnoho).

Současně je takto zároveň „kódováno“ či „zahrnuto“ ještě něco dalšího, totiž pořadí čísel v seznamu či ono vzájemně jednoznačné zobrazení, které se předpokládá *jako již hotové*, dané – z nekonečného, ale již „uskutečněného“ vzájemně jednoznačného zobrazení nekonečných množin umíme vybrat všechny dvojice, které cosi splňují, z potenciálně nekonečného množství vět umíme vybrat *všechny*, které to či ono vypovídají či nevypovídají o (jiných) větách, z množin všechny, které obsahují (či neobsahují) samy sebe apod. Problematické na příslušném kritériu výběru je, že již předpokládá jakousi kategorizaci jako uskutečněnou, danou, přitom je ale samo součástí této kategorizace a může ji měnit – Poincaré o tom hovoří jako o „nepredikativních“ kritériích, totiž takových, která vybírané objekty nemusejí splňovat nějak nezávisle samy od sebe, ale jejich splňování může záviset na aplikované kategorizaci. Poincaré používá jako příklad klasifikaci „celé číslo definovatelné nejvýše sto slovy“ – pokud bychom vypsali všechny maximálně stoslovné řetězce, které definují čísla, je možné na základě tohoto již hotového seznamu nově definovat čísla, jejichž definice v seznamu není obsažena, jelikož se opírá o hotový a ukončený seznam, přesto však nově (díky uskutečněné klasifikaci) splňují příslušné kritérium: „mezi těmito větami pak budou takové, které budou mít smysl až poté, co byla klasifikace dokončena, tj. věty, které se týkají samotné klasifikace"[58] (příkladem by mohl být popis „nejmenší číslo, jehož popis není obsažen v daném seznamu" – definuje číslo méně než sto slovy, přesto z povahy věci nemůže být obsažen v původním seznamu). Poincaré upozorňuje na to, že u nekonečných souborů nemůže být nepredikativní klasifikace, která se zakládá „na nějaké relaci prvků, které mají být klasifikovány, a celého souboru" vlastně nikdy hotova.[59] Přitom ovšem při antidiagonálním zadávání předpokládáme, že klasifikace už hotova je (že jsme například vypsali seznam *všech* nekonečných posloupností číslic) a pomocí takovéto *ukončené* klasifikace definujeme ještě další objekt (zdánlivě) spadající pod danou klasifikaci.

Antidiagonální postup je tedy nějak problematický sám o sobě, jednak proto, že se předpokládá metaúroveň vymezení, a to na základě klasifikace dané *nepredikativním* kritériem, jednak (možná trochu překvapivě) tím, že toto vymezení je, zjednodušeně řečeno, „negativní", vybírá něco, co *není* nějaké (není prvkem, nevypovídá o, nedělí jisté číslo atp.). Negativní vymezení má řekněme „paradoxní potenciál" z toho důvodu, že umožňuje formulovat spor: vymezení o svém předmětu něco vypovídá, ale je-li toto vymezení negativní, zároveň svému předmětu něco upírá. Nepredikativnost kritéria spočívá v tom, že netřídíme objekty podle nějaké jejich trvalé vlastnosti (třeba přirozená čísla na sudá a lichá), ale v zásadě nahodile je nějakým způsobem pojmenujeme (nekonečné řadě přiřadíme nějaké pořadí v seznamu či podmnožině přiřadíme jeden prvek dané množiny jako obraz ve vzájemně jednoznačném zobrazení – to můžeme chápat jako jakési „pojmenování" dané množiny pomocí příslušného prvku), což nám najednou teoreticky umožňuje nově definovat objekt, který předtím takto definován být nemohl (definice by nedávala smysl): množinu všech vzorů, které nejsou prvkem svého obrazu, případně posloupnost, která se pro každé *n* liší od *n*-té posloupnosti na *n*-tém místě. Tento objekt je zároveň nějak nově vymezen pomocí hotové klasifikace určitého celku, zároveň ale předpokládáme, jako kdyby byl již původně součástí tohoto celku a spadal tudíž pod příslušnou klasifikaci. Problém je, že přijmeme-li vzhledem k výše řečenému tezi, že jak nekonečné řady, tak nekonečné množiny neexistují nějak nezávisle samy o sobě, ale musí být zadány či konstituovány určitým kritériem, v případě antidiagonálního vymezení se toto kritérium nabízí *až potom*, kdy jsme údajně *všechny* posloupnosti či *všechny* podmnožiny nějak seřadili či „po-

[58] Poincaré, „Logika nekonečna," 321; „větami" v tomto kontextu rozumějme smysluplné řetězce slov.
[59] Srovnej ibid., 320–22.

jmenovali“. Stejně jako je problematické uvažovat množinu všech množin, které neobsahují samy sebe, jelikož konstituování této množiny je v zásadě možné teprve tehdy, kdy je o *všech* množinách rozhodnuto, zda sebe obsahují, nebo nikoli, je problematické uvažovat množinu všech vzorů, které nejsou obsaženy ve svém obraze ve vzájemně jednoznačném zobrazení, jelikož její konstituce je možná teprve tehdy, kdy je o *všech* vzorech (tedy i o jejím) rozhodnuto, zda patří do svého obrazu, či nikoli. Tento způsob konstrukce lze tedy buď úplně odmítnout, nebo konstatovat, že probíhá na metaúrovni a některé kategorie z původní úrovně již nemá smysl na konstruovaný předmět aplikovat (třeba se ptát, zda věta „Všechny věty, které nevypovídají samy o sobě, jsou formulovány v jazyce“ je sama o sobě, tj. nepovažovat tuto větu za spadající mezi to, o čem věta vypovídá a nevypovídá).

Ještě malá poznámka na okraj: je otázka, zda je Cantorovo ústřední měřítko „mohutnosti“ množin ve smyslu vzájemně jednoznačného zobrazení vlastně tak stěžejní – vždyť je ve skutečnosti velmi hrubé: Bolzanův důraz na to, že navzdory vzájemně jednoznačné zobrazitelnosti se nekonečné množiny od sebe mohou podstatně lišit a že je lépe sledovat mnohem subtilnější měřítko jejich „základního určení“, se nezdá být nepatřičný. Jemnější rozlišování nekonečných struktur může detailněji zachycovat jejich různorodost a bohatost.

7. Shrnutí

Cantorův antidiagonální důkaz ve skutečnosti vychází z více předpokladů, při vyvození sporu bychom tedy měli mít volbu, který z nich odmítneme. Můžeme odmítnout předpoklad nezávislé existence nahodilé nekonečné řady či nahodilé nekonečné množiny – představa nekonečné řady existující nezávisle na svém způsobu zadání je, jak na to upozorňuje Wittgenstein, navýsost problematická; ostatně ani zavedená ZF axiomatika teorie množin nepředpokládá, aby se vyhnula sporu, nějakou nezávislou existenci jakýchkoli souborů, ale pokládá za množiny to, co je kumulativně konstituováno určitým předpisem z „již existujících“ množin (přičemž existenci diskutabilní aktuálně nekonečné, hotové množiny, do které již nelze nic přidat, ale která by měla shrnovat celé potenciální nekonečno, ke kterému lze principiálně vždy ještě něco přidat, musí axiomatika teorie množin „natvrdo“ postulovat pomocí speciálního axiomu). Pokud vyjdeme z předpokladu, že nekonečná řada musí být dána určitým předpisem, funkcí, je pak dobré si uvědomit, že i onen případný antidiagonální „metapředpis“ řady či množiny je součástí seznamu částečně rekurzivních funkcí, takže předpisy algoritmicky vyčíslitelných nekonečných řad teoreticky tvoří vlastní podmnožinu tohoto *spočetného* seznamu.

Dále lze mít výhrady k onomu antidiagonálnímu způsobu vymezení řady či množiny, který je problematický proto, že předpokládá uskutečněnou a ukončenou nahodilou klasifikaci (očíslování či vzájemně jednoznačné přiřazení prvku nějaké podmnožině) nikdy nekončícího souboru, na jejímž základě ale chce „přidat" k hotovému a již roztříděnému souboru nějaký jeho další prvek, který je ovšem vymezen a vymezitelný jen pomocí předpokládané hotové klasifikace. Přijmeme-li tezi, že nekonečné řady a nekonečné množiny jsou vlastně konstituovány teprve příslušným předpisem, vymezením, je problematické aplikovat na *všechny* řady či *všechny* podmnožiny nějaké třídící kritérium, aby na základě tohoto uskutečněného třídění najednou vyvstala možnost nově definovat (čili vlastně nově „vytvořit") ještě další řadu či další podmnožinu, která ovšem v původním seznamu nemohla být obsažena, jelikož z hlediska svého předpisu ještě „neexistovala". Tudíž stejně jako teorie množin odmítá ono „antidiagonální" vymezení „množiny všech množin neobsahujících sebe samé", můžeme odmítnout i „množinu všech vzorů, které nejsou obsaženy ve svém obraze ve vzájemně jednoznačném přiřazení", případně konstruování „posloupnosti, která se pro každé *n* liší na *n*-tém místě od *n*-té posloupnosti z nekončícího seznamu *všech* posloupností", případně toto konstruování považovat za konstrukci na jiné úrovni, takže konstruovaný objekt již nespadá do původního souboru objektů (např. soubor všech množin neobsahujících sebe samé již není množinou, antidiagonální funkce již není primitivně rekurzivní).

Akceptujeme-li tedy Cantorův důkaz, je dobré si uvědomit, že tím přijímáme i některé výchozí postuláty, které nejsou úplně samozřejmé či neproblematické – volíme tak určitý způsob uchopení nekonečna a dáváme mu přednost před jiným. Cantorovo mohutnící univerzum je tedy mnohem spíše otázkou výchozí volby předpokladů než nezpochybnitelným matematickým faktem.

Poděkování:

Děkuji Jaroslavu Peregrinovi a Vítu Punčochářovi za cenné podněty a plodné diskuse nad pracovní verzí tohoto článku; rovněž děkuji oběma anonymním recenzentům za podstatné připomínky a návrhy na vylepšení.

Bibliografie:

Aristotelés. *Metafyzika*. Přel. Antonín Kříž. Praha: Rezek, 2003.

Aristotelés. *Fyzika*. Přel. Antonín Kříž. Praha: Rezek, 1996.

Bagaria, Joan. „Set Theory." In *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford University, 1997–. Article revised January 24, 2023.

Balcar, Bohuslav a Petr Štěpánek. *Teorie množin*. 2. vyd. Praha: Academia, 2000.

Bolzano, Bernard. *Paradoxy nekonečna.* Přel. Otakar Zich. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1963.

Boolos, George S., John P. Burgess, and Richard C. Jeffrey. *Computability and Logic*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. https://doi.org/10.1017/CBO9781139164931.

Cantor, Georg. „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre I." *Mathematische Annalen* 46, no. 4 (1895): 481–512. https://doi.org/10.1007/BF02124929.

Cantor, Georg. „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen." *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 77 (1874): 258–62. https://doi.org/10.1515/crll.1874.77.258.

Cantor, Georg. „Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre." *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 1 (1891): 75–78.

Cantor, Georg. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in des Lehre der Unendlichen*. Leipzig: Teubner, 1883.

Cantor, Georg. „Zur Begründung der transfiniten Mengenlehre II." *Mathematische Annalen* 49, no. 2 (1897): 207–46. https://doi.org/10.1007/BF01444205.

Dean, Walter. „Recursive Functions." In *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford University, 1997–. Article revised September 28, 2021.

Ferreirós, José. *Labyrint of Thought. A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. Basel: Birkhäuser, 2007.

Frege, Gottlob. *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau: Wilhelm Koebner, 1884.

Frege, Gottlob. *Wisseschaftliche Briefwechsel*. Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1976.

Gödel, Kurt. „Über formal unentscheidbare Sätze der ‚Principia Mathematica' und verwandter Systeme." *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 (1931): 173–98. https://doi.org/10.1007/BF01700692.

Hilbert, David. „Über das Unendliche." *Mathematische Annalen* 95, no. 1 (1926): 161–90. https://doi.org/10.1007/BF01206605.

Hume, David. *A Treatise of Human Nature I.* London: J. Noon, 1739.

Kolman, Vojtěch. „Continuum, Name and Paradox." *Synthese* 175 (2010): 351–67. https://doi.org/10.1007/s11229-009-9527-7.

Kolman, Vojtěch. *Filosofie čísla.* Praha: Filosofia, 2008.

Kolman, Vojtěch a Vít Punčochář. *Formy jazyka.* Praha: Filosofia, 2015.

Lorenzen, Paul. „Aktuální nekonečno v matematice." In *O špatném nekonečnu*, editovali Vojtěch Kolman a Robert Roreitner, 397–405. Praha: Filosofia, 2013.

Peregrin, Jaroslav. „Diagonal Arguments." *AUC Philosophica et Historica/ Miscellanea Logica* 2017, no. 2 (2017): 33–43. https://doi.org/10.14712/24647055.2017.14.

Poincaré, Henri. „Logika nekonečna." In *O špatném nekonečnu*, editovali Vojtěch Kolman a Robert Roreitner, 319–42. Praha: Filosofia, 2013.

Russell, Bertrand. „On Some Difficulties in the Theory of Transfinite." *Proceedings of the London Mathematical Society* 2–4, no. 1 (1907): 29–53. https://doi.org/10.1112/plms/s2-4.1.29.

Švejdar, Vítězslav. *Logika, neúplnost, složitost a nutnost*. Praha: Academia, 2002.

Tarski, Alfred. „Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen." *Studia Philosophica* 1 (1935): 261–405.

Tarski, Alfred. „The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics." *Philosophy and Phenomenological Research* 4 (1944): 341–76. https://doi.org/10.2307/2102968.

Therrien, Valérie L. „Wittgenstein and Labyrinth of ‚Actual Infinity': The Critique of Transfinite Set Theory." *Ithaque* 10 (2012): 43–65.

Whitehead, Alfred N. and Bertrand Russell. *Principia Mathematica*. 3 volumes. Cambridge: Cambridge University Press, 1910, 1912, 1913.

Wittgenstein, Ludwig. *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. London, Cambridge, MA: Basil Blackwell and MIT Press, 1967.

Wittgenstein, Ludwig. Interactive Dynamic Presentation (IDP) of Ludwig Wittgenstein's Philosophical Nachlass. Edited by the Wittgenstein Archives at the University of Bergen under the direction of Alois Pichler. http://wittgensteinonline.no/.

Wittgenstein, Ludwig. *Philosophische Bemerkungen*. Frankfurt am Mein: Suhrkamp, 1964.

Zich, Otakar. *Úvod do filosofie matematiky*. Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1947.