https://doi.org/10.46938/tv.2022.546

////// studie / article //

AXIOM VÝBĚRU A HYPOTÉZA KONTINUA – SOUVISLOSTI A ROZDÍLY

Abstrakt: *V práci porovnáváme dvě známá množinově-teoretická tvrzení, totiž axiom výběru a hypotézu kontinua, z hlediska jejich historického vývoje a formulace a rovněž z hlediska jejich důsledků v matematice. Obě tvrzení jsou nezávislá na ostatních axiomech teorie množin (pokud jsou tyto axiomy konzistentní). Axiom výběru – přes počáteční váhání a někdy i odpor – je dnes téměř univerzálně přijímán. Naproti tomu status hypotézy kontinua je mnohem složitější a nepanuje shoda ohledně její platnosti: hypotéza kontinua i její negace (často jako důsledky silnějších tvrzení) rozhodují odlišně mnohá matematicky zajímavá tvrzení, ale na rozdíl od axiomu výběru není zřejmé, které řešení je to „správné“ (ve smyslu shody v matematické komunitě).*

Klíčová slova: *axiom výběru; hypotéza kontinua; axiomy teorie množin*

Axiom of Choice and Continuum Hypothesis – Connections and Differences

Abstract: *We compare two well-known set-theoretical statements, namely the axiom of choice and the continuum hypothesis, with regard to their historical development and formulation, as well as their consequences in mathematics. It is known that both statements are independent from the other axioms of set theory (if they are consistent). The axiom of choice – despite initial controversies – is today almost universally accepted as an axiom. However, the status of the continuum hypothesis is more complex and no agreement has been found so far: both the continuum hypothesis and its negation (often as consequences of stronger statements) decide several mathematical problems differently, but in contrast with the axiom of choice it is not clear which of the two solutions should be the "correct" one (in the sense of an agreement within the community).*

Keywords: *axiom of choice; continuum hypothesis; axioms of set theory*

TEREZA SLABÁ
Katedra logiky
Univerzita Karlova
Celetná 20, 110 00 Praha 1
email / Tereza.Stejskalova@ff.cuni.cz
0000-0003-2466-8737

Tento výzkum byl podpořen vnitřním grantem FFUK 260552.

1. Úvod

V původním významu znamenalo slovo „axiom“ tvrzení, které považujeme za samozřejmé, zjevně pravdivé, nepotřebující důkaz. V moderní době je pojem axiomu chápán komplexněji, hlavně v důsledku výsledků Kurta Gödela o neúplnosti obvyklých axiomatických teorií. V článku se soustředíme na dvě tvrzení, z nichž jedno je nyní téměř bezvýhradně chápáno jako axiom a druhé by takový status mít mohlo: axiom výběru a hypotéza kontinua. Ačkoli tato tvrzení vznikala téměř současně a můžeme říci, že na obdobných základech, přistupujeme k nim v současnosti velmi rozdílně. Jedno běžně přijímáme jako axiom, o druhém už jako o axiomu neuvažujeme. Rozdíly identifikujeme především v oblasti historie těchto tvrzení a v jejich důsledcích.

V obsáhlejší kapitole „Historický kontext“ se zaměříme na definici axiomu výběru a hypotézy kontinua. Dále pak na použití axiomu výběru před rokem 1904, tedy před rokem, než byl tento axiom explicitně definován. Tomuto období se budeme věnovat podrobněji, jelikož ilustruje, jak přirozené tvrzení axiom výběru pro matematiky v té době byl. Celou touto kapitolou prostupuje práce Georga Cantora, německého logika a matematika, který je zakladatelem moderní teorie množin. Formuloval hypotézu kontinua a výrazně se zasloužil i o zvýšení povědomí o axiomu výběru mezi ostatními matematiky. Dále jsou zde uvedeny práce a výsledky významných matematiků této doby, kteří jednak výrazně reagovali na Cantorovu práci, jednak použili ve své práci axiom výběru. V další kapitole „Axiom výběru a hypotéza kontinua v matematice“ se věnujeme důsledkům axiomu výběru a hypotézy kontinua. Kapitola je spíše shrnující a má čtenáři poskytnout obecnou představu o tom, jakého charakteru jsou důsledky jak axiomu výběru, tak hypotézy kontinua. Celý text vede k přirozené otázce, zda se podobně přesvědčivé důsledky jako známe u axiomu výběru objeví postupně také u hypotézy kontinua (a tedy povedou k jejímu přijetí nebo odmítnutí), nebo je hypotéza kontinua, či obecněji otázka velikosti reálných čísel, inherentně příliš vágní, než aby měla vliv na matematický vývoj.

2. Historický kontext

2.1 Definice pojmů

Axiom výběru a hypotéza kontinua jsou tvrzení, která vstupují do matematiky na základě Cantorova nového pojetí nekonečna. Do dob Cantorových bylo matematiky většinou přijímáno pouze tzv. potenciální nekonečno přirozených čísel, tedy předpoklad, že neexistuje největší přirozené číslo. S Cantorem přichází aktuální nekonečno; tedy nekonečno, které chceme pojmenovat, určit jeho velikost, sčítat, násobit a mocnit – chceme s nekonečnem zacházet, jako s jinými matematickými objekty, jako jsou např. celá nebo racionální čísla či funkce.

Na základě takového přístupu vznikají nová tvrzení, která mluví o nekonečných množinách. Pro náš text je podstatná Cantorova věta z roku 1874,[1] v níž dokázal, že počet reálných čísel, kterým se také říká *(reálné) kontinuum*, je ostře větší než počet přirozených čísel, tedy v dnešní terminologii, že reálných čísel je nespočetně mnoho.[2] Ale kolik jich je přesně?[3] Tato otázka vedla Cantora k tzv. *hypotéze kontinua*, zkráceně CH (*Continuum Hypothesis*), která zní (níže zmíníme, že (2.1) má několik ekvivalentních formulací):

> (2.1) Každá nekonečná podmnožina reálných čísel je buď stejně velká jako množina přirozených čísel, nebo má stejnou velikost jako množina všech reálných čísel.

Dále se tvrzení, která mluví o konečných množinách, rozšiřují i na tvrzení, která mluví o nekonečných množinách. Zatímco pro konečné množiny

[1] Georg Cantor, „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen," *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 77 (1874): 258–62.

[2] Cantor definuje, že mohutnost množiny A je menší nebo rovna mohutnosti množiny B, píšeme $|A| \leq |B|$, když existuje prostá funkce z A do B. Mohutnost množiny A je stejná jako mohutnost množiny B, $|A| = |B|$, když existuje bijekce z A na B. Mohutnost množiny A je ostře menší než mohutnost množiny B, $|A| < |B|$, když existuje prostá funkce z A do B a zároveň neexistuje bijekce z A na B. Tato definice je přirozená v tom smyslu, že u konečných množin dává obvyklé uspořádání podle počtu prvků.

[3] Kde slovem „přesně" se míní, které nekonečné číslo odpovídá počtu reálných čísel. Poznamenejme, že relace porovnaní mohutnosti $|A| \leq |B|$ je pouze binární relací a bez dalšího ještě neříká, kolik má která množina prvků, říká jen která množina je menší či větší než ta druhá. Snaha přiřadit každé i nekonečné množině „číslo", které měří počet jejich prvků, hrála z počátku vývoje teorie množin velkou roli, viz diskuze ohledně kardinálních čísel níže v textu.

může být takové tvrzení snadno dokazatelné, pro nekonečné nikoli. Takovým případem je *axiom výběru*, zkráceně AC (*Axiom of Choice*):

(2.2) Pro každou množinu A existuje funkce f taková, že $f(a) \in a$ pro každé neprázdné $a \in A$.

Funkci v definici (2.2) nazýváme výběrovou. Není obtížné ukázat, že výběrová funkce existuje pro každou konečnou množinu. Zřejmě i proto je přirozené zobecnit tuto definici na všechny množiny a říci, že výběrová funkce existuje pro každou množinu, tedy i pro každou nekonečnou množinu.

2.2 Princip dobrého uspořádání

Ukazuje se, že axiom výběru i hypotéza kontinua souvisejí s tzv. *principem dobrého uspořádání*, který Cantor uvedl v roce 1883 původně jako samozřejmý logický zákon:[4]

(2.3) Každá množina může být dobře uspořádána,

kde *dobré uspořádání* je definováno následovně:

(2.4) Uspořádání $<$ množiny A je dobré uspořádání, jestliže každá neprázdná podmnožina A má nejmenší prvek v uspořádání $<$.

Dobré uspořádání je přirozený způsob, jak získat výběrovou funkci: je-li v (2.2) A systém podmnožin dobře uspořádané množiny X, lze snadno definovat $f(a)$ jako nejmenší prvek množiny a.[5]

Hypotéza kontinua hrála stěžejní roli při zavedení tohoto principu; Gregory H. Moore ve své knize *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence*[6] uvádí, že Cantorova korespondence dokonce naznačuje, že to byla forma hypotézy kontinua, která Cantora vedla k formulaci principu dobrého uspořádání. Princip nebyl přijat jako samozřejmý a Cantor se jej po deseti letech pokusil dokázat. V této době již místo „principu“ používal pojem „problém“ nebo také „věta“. A snaha dokázat tuto větu

[4] Georg Cantor, „Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten,“ *Mathematische Annalen* 21 (1883): 545–91.
[5] Protože v matematice bychom často chtěli použít výběrovou funkci na podmnožiny reálných čísel, vystupuje do popředí důležitost otázky dobrého uspořádání reálných čísel, jak dále popisujeme v textu.
[6] Gregory H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence* (New York: Springer, 1982).

vedla německého matematika Ernsta Zermela k explicitní formulaci axiomu výběru.

Pojem dobrého uspořádání je tudíž spjat jak s axiomem výběru, tak s hypotézou kontinua; než se však zaměříme na toto propojení, podíváme se na to, jak Cantor dobré uspořádání definoval a jak s jeho pomocí zavedl pojmy *ordinální číslo (ordinál)* a *kardinální číslo (kardinál).*

V pojmu dobrého uspořádání Cantor uchopil základní vlastnost uspořádání množiny přirozených čísel a zobecnil ji na větší systémy.[7] Protože dobře uspořádané množiny lze snadno porovnávat z hlediska jejich „délky", uvažoval v článku „Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten"[8] z roku 1883 ekvivalenční třídy dobře uspořádaných množin a jejich reprezentanty nazval *ordinálními čísly*, či krátce *ordinály*. Typ – tedy ordinál – je podle Cantora kanonický reprezentant třídy izomorfních dobře uspořádaných množin.[9]

Definice ordinálů vedla Cantora následně k definování číselných tříd (mohutností nekonečných množin). Stanovuje, že ordinální číslo α je v číselné třídě ($\beta + 1$), když množina všech ordinálních předchůdců α má mohutnost číselné třídy β.[10] Druhá číselná třída je tudíž množinou všech spočetných ordinálních čísel. První číselná třída jsou všechna konečná ordinální čísla, což jsou – definitoricky – všechna přirozená čísla. Pro číselnou třídu budeme používat zavedený pojem *kardinální číslo*. Prostřednictvím tohoto procesu Cantor postuloval neomezenou posloupnost číselných tříd, které spojovaly pojmy ordinální a kardinální číslo. Vznikla tak posloupnost kardinálů, které v článku „Beiträge zur Begründung der transifiniten Mengenlehre" z roku 1895 nazval *alefy*.[11] První číselná třída je tedy značena jako $\aleph_0$ a druhá číselná jako $\aleph_1$.

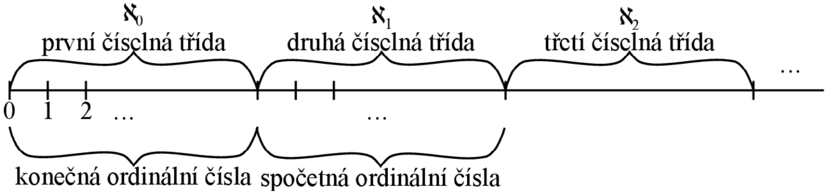
[7] Cantorova původní definice byla kostrbatější: Uspořádání < množiny A je dobré uspořádání když: (i) A je lineárně uspořádáno relací < , (ii) A má v uspořádání < nejmenší prvek a_0, (iii) kdykoli $B \subseteq A$ a $\exists a \in A \setminus B$ takové, že $\forall b \in B$: $b < a$, potom existuje nejmenší $a \in A \setminus B$ takové, že $\forall b \in B$: $b < a$. Je vidět, že původní definice vycházela z vlastností obvyklých číselných uspořádání na celých, racionálních a reálných číslech, proto je kladen důraz na linearitu a existenci nejmenšího prvku. Z dnešního pohledu jsou to však zbytečné komplikace, zásadní je bod (iii) s kvantifikací přes všechny podmnožiny.

[8] Cantor, „Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten."

[9] Dvě uspořádání $(A, \leq_A)$ a $(B, \leq_B)$ jsou izomorfní, když existuje bijekce $f: A \to B$ taková, že pro všechna $x, y \in A$, $x \leq_A y$, právě když $f(x) \leq_B f(y)$.

[10] Viz Cantor, „Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten."

[11] Cantorovo označení funkce, která α-tému ordinálnímu číslu přiřazuje α-té nekonečné kardinální číslo, označované $\aleph_\alpha$. Např. $\aleph_0$ je množina všech přirozených čísel, tedy konečných ordinálních čísel a také nejmenší nekonečná množina, a $\aleph_1$ je nejmenší velikost větší než $\aleph_0$.



Nekonečné kardinální číslo je zde v principu definováno jako ekvivalenční třída podle relace být v „bijekci na ordinálních číslech".[12]

(2.5) X je nekonečné kardinální číslo, právě když X je ekvivalenční třída relace „být v bijekci na ordinálních číslech".

V této době však definice kardinálních čísel nebyla ustálená a můžeme se setkat i s definicí, že kardinální číslo je ekvivalenční třída podle bijekce na celém univerzu množin.[13]

(2.6) X je kardinální číslo, právě když X je ekvivalenční třída podle relace „být v bijekci na celém univerzu množin".

A uveďme ještě třetí definici, která je v současné době chápána jako výchozí:

(2.7) Říkáme, že α je kardinální číslo, jestliže α je ordinální číslo, které nelze prostě zobrazit na žádné menší ordinální číslo.

Vidíme, že definice (2.7) a (2.5) jsou na sebe snadno převeditelné v tom smyslu, že podle (2.7) je kardinál nejmenší ordinál z množiny ordinálů, která tvoří kardinál ve smyslu definice (2.5). Tedy kardinál podle (2.7) je kanonickým reprezentantem kardinálu ve smyslu definice (2.5). Mít jistou velikost tedy podle těchto definic znamená být v bijekci s nějakým ordinálním číslem. Ale zde se skrývá problém: existuje-li bijekce mezi libovolnou množinou X a ordinálním číslem α, pak X lze dobře uspořádat podle typu α. Tedy pokud má mít každá množina velikost, pak ji musí být možné dobře uspořádat, a odtud tedy vychází důležitost principu dobrého uspořádání. Naproti tomu

[12] Jak níže zmíníme, ordinální čísla se obvykle značí řeckými písmeny z počátku abecedy: α, β, γ atd. Relace „mít stejnou mohutnost" $|\alpha| = |\beta|$ na ordinálních číslech je relací ekvivalence. Kardinální čísla můžeme ztotožnit s odpovídajícími ekvivalenčními třídami.

[13] Ekvivalenční třídy jsou však v tomto případě vlastní třídy (např. ekvivalenční třída singletonu $\{0\}$ obsahuje všechny singletony $\{x\}$ pro všechny množiny x), což představuje drobnou technickou obtíž, která ale pro nás zde není podstatná.

definice kardinálu (2.6) je obecnější a i bez dalších předpokladů platí, že každá množina „má velikost", tj. je prvkem nějaké ekvivalenční třídy podle relace $|A| = |B|$ na třídě všech množin.

První Cantorova formulace hypotézy kontinua z roku 1878 se vyhýbala pojmu kardinálního čísla:

> (2.8) Každá nekonečná podmnožina X reálných čísel je buď spočetná, tj. existuje bijekce mezi X a přirozenými čísly, nebo má mohutnost celého kontinua.

Až o čtyři roky později, když Cantor píše Richardu Dedekindovi, je pojem mohutnosti použit explicitně:

> (2.9) Množina reálných čísel má mohutnost množiny všech spočetných ordinálních čísel.

Toto tvrzení je ekvivalentní následujícímu tvrzení:[14]

> (2.10) Mohutnost množiny všech reálných čísel je nejmenší nespočetný kardinál.

Když v roce 1895 ve svém „Beiträge"[15] zavedl Cantor notaci pro kardinály pomocí funkce alef, získala hypotéza kontinua tuto podobu:

> (2.11) $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Zatímco tvrzení (2.10) a (2.9) jsou ekvivalentní bez axiomu výběru, ekvivalence mezi (2.10) a (2.8) ho vyžaduje. Rozdíl mezi těmito definicemi je také v tom, že (2.8) umožňuje zkoumat, pro které podmnožiny $\mathbb{R}$ platí hypotéza kontinua v tom smyslu, že jsou buď spočetné nebo mají mohutnost kontinua. V kapitole 2.2 zjistíme, že to platí mimo jiné pro uzavřené podmnožiny $\mathbb{R}$, viz důsledek Cantor-Bendixsonovy věty (2.12) zmíněný v kapitole 2.2.[16] Všimněme si také, že formulace (2.10) a (2.9) implikují, že existuje dobré uspořádání reálných čísel, zatímco formulace (2.8) nikoli.

[14] Donald A. Martin, „Hilbert's First Problem: The Continuum Hypothesis," *Proceeding of Symposia in Pure Matematics* 28 (1976): 81.

[15] Georg Cantor, „Beiträge zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre," *Mathematische Annalen* 47 (1895): 481–512.

[16] Později další matematici rozšířili Cantor-Bendixsonovu větu na všechny tzv. borelovské množiny, což je nejmenší Booleova algebra množin obsahující uzavřené množiny, která je uzavřena na spočetné průniky, sjednocení a doplňky. S borelovskými množinami se setkáme dále v textu. Nechceme zde zavádět příliš mnoho technických definic, ale poznamenejme bez podrobností, že Cantor-Bendixsonova věta platí dokonce pro všechny analytické množiny a za předpokladu jistých axiomů postulujících existenci tzv. velkých kardinálů pro všechny projektivní množiny.

Moore zmiňuje, že je možné, že právě tento fakt vedl Cantora k domněnce, že reálná čísla mohou být dobře uspořádána a následně k formulaci principu dobrého uspořádání.[17] Moore dále uvádí, že v roce 1897 Cantor věřil, že našel důkaz dobrého uspořádání reálných čísel, ale že pravděpodobně o korektnosti důkazu pochyboval, jelikož odmítl jeho zveřejnění. Nástin předpokládaného důkazu poslal německému matematikovi Davidu Hilbertovi roku 1896 nebo 1897, dopis se ale nedochoval. Je však pravděpodobné, že argument byl obdobný jako ten, který se objevuje ve dvou dopisech, které poslal Cantor Dedekindovi v roce 1899.

Můžeme se domnívat, že Hilberta tento důkaz nepřesvědčil, jelikož v roce 1900 na mezinárodním kongresu matematiků v Paříži zmiňuje problémy kontinua a dobrého uspořádání reálných čísel jako první na svém seznamu nejpodstatnějších nevyřešených matematických problémů. Po této Hilbertově přednášce se začali matematici těmto problémům věnovat aktivněji. Podle Hilberta se problém kontinua skládal ze dvou částí, za prvé z tvrzení (2.8), že každá nekonečná množina reálných čísel je buď spočetná, nebo má mohutnost kontinua, a za druhé z otázky, zda existuje dobré uspořádání reálných čísel. Hilbert souhlasil s Cantorem, že tyto dva problémy jsou ústředními problémy současné teorie množin, což se projevuje i v tom, že ovlivnil řadu matematiků, aby svůj výzkum věnovali tomuto problému. Například podporoval práci Felixe Bernsteina a Felixe Hausdorffa v otázce hypotézy kontinua. Také Zermelův důkaz z roku 1904, že každá množina může být dobře uspořádaná, pokud předpokládáme axiom výběru, byl napsán a publikován jako dopis Hilbertovi.

Cantor v dopise Dedekindovi z roku 1882 tvrdí, že je schopen dokázat tvrzení (2.9), totiž že množina všech reálných čísel má mohutnost množiny všech spočetných ordinálních čísel, neboli druhé číselné třídy, kterou Cantor značil $\aleph_1$. Brzy použil tvrzení (2.9) u svých výsledků. Moore uvádí, že Cantor dvakrát v průběhu roku 1883 tvrdil, že určitá podmnožina $\mathbb{R}$ má velikost druhé číselné třídy, i když pouze ukázal, že tato podmnožina je nespočetná – např. v kontextu tzv. Cantor-Bendixsonovy věty:[18]

(2.12) Každá nespočetná uzavřená podmnožina $\mathbb{R}$ může být rozdělena na perfektní množinu a spočetnou množinu.

[17] Moore, *Zermelo's Axiom of Choice*, 41–42.

[18] Cantor formuloval první verzi této věty již v roce 1883, ale obsahovala chybu, na kterou upozornil švédský matematik Ivar Otto Bendixson. Cantor na základě diskuze s Bendixsonem větu opravil (2.12). Viz Moore, *Zermelo's Axiom of Choice*, 34.

Důsledek této věty je, že každá uzavřená nekonečná množina reálných čísel je buď spočetná, nebo má mohutnost kontinua,[19] a tudíž hypotéza kontinua ve formě (2.8) platí pro uzavřené množiny reálných čísel.[20]

Poznámka. Zmiňme jen pro úplnost tzv. zobecněnou hypotézu kontinua, která říká, že pro každé α, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, neboli mohutnost množiny všech podmnožin množiny mohutnosti $\aleph_\alpha$ je nejmenší kardinální číslo větší než $\aleph_\alpha$. Cantor nikdy explicitně neuvažoval o zobecnění hypotézy kontinua na vyšší kardinály. Nicméně v dopise Mittag-Lefflerovi z roku 1882 píše, že množina všech reálných funkcí má velikost $\aleph_2$, třetí číselné třídy, což lze nazvat „částečným“ zobecněním hypotézy kontinua.[21] Byl to Philip E. B. Jourdain, který v lednu 1905 poprvé publikoval zobecněnou verzi hypotézy kontinua, tedy že $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.[22]

2.3 Použití axiomu výběru před rokem 1904

Na rozdíl od hypotézy kontinua a principu dobrého uspořádání se axiom výběru objevoval v matematických úvahách spíše skrytě. Teprve v kontextu Zermelova důkazu jeho ekvivalence s principem dobrého uspořádání si ho matematici začali více všímat. Moore si všímá „skrytého“ používání axiomu výběru před rokem 1904 a píše o jeho „implicitním použití“. Pod toto implicitní použití spadají i slabší formy axiomu výběru, jako je spočetný axiom výběru a princip závislých výběrů. Spočetný axiom výběru je tvrzení, ve kterém se existence výběrové funkce omezí pouze na spočetné množiny, bývá značen AC_ω a zní:

(2.13) Pro každou spočetnou množinu A existuje funkce f taková, že $f(a) \in a$ pro každé neprázdné $a \in A$.

Princip závislých výběrů, který bývá značen DC (z anglického *Dependent Choices*), je definován následovně:[23]

[19] Perfektní množina reálných čísel je uzavřená a bez izolovaných bodů. Lze ukázat, že každá taková množina již má mohutnost celého kontinua.
[20] Jak jsme již výše zmínili, hypotéza kontinua platí i pro všechny borelovské množiny, a dokonce pro všechny analytické množiny (což jsou spojité obrazy borelovských množin).
[21] Georg Cantor, *Briefe* (New York: Springer, 1991), 99.
[22] Viz Philip E. B. Jourdain, „On Transfinite Cardinal Numbers of the Exponential Form,“ *Philosophical Magazine* 9, no. 49 (1905): 42–56.
[23] Můžeme si všimnout, že DC implikuje princip AC_ω.

(2.14) Pokud S je binární relace na množině A taková, že pro každé x v A existuje nějaké y v A takové, že xSy , pak existuje posloupnost a_0, a_1, … taková, že pro každé přirozené číslo n, a_n je v A a platí a_nSa_{n+1}.

Implicitním použitím axiomu výběru tedy označujeme důkaz, ve kterém je použit axiom výběru nebo jeho slabší forma, ale v důkazu to není výslovně uvedeno. Před rokem 1904 můžeme podle Moora nalézt mnoho příkladů tohoto implicitního použití, například v důkazech tvrzení, že sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetná množina (Cantor), kde je zapotřebí použít AC_ω, a že každá nekonečná množina má spočetnou podmnožinu (Cantor,[24] Borel,[25] Russell[26]), kde je zapotřebí DC. Dále v důkazech principu rozkladu (Burali-Forti[27]), trichotomie kardinálů a principu dobrého uspořádání, kde musí být použit axiom výběru v plném znění. V textu se dále budeme věnovat větě o spočetném sjednocení, větě, že každá nekonečná množina má spočetnou podmnožinu, a zmíníme i princip rozkladu. Dále uvedeme Heineho větu, jelikož je to pravděpodobně jedna z prvních vět, ve které byl implicitně použit axiom výběru a tvrzení o ekvivalenci dvou definic konečnosti, jehož důkaz také vyžaduje axiom výběru.

„Skrytost" axiomu výběru může mít mnoho příčin. V širším smyslu sahá historie axiomu výběru do dob Eukleidových, kde můžeme vidět jistou formu výběrového principu ve výběru libovolného prvku při dokazování metodou generalizace.[28] Vybrat jeden prvek z nekonečného množství nečiní žádné potíže a stejně tak bezproblémové je vybrat jeden prvek z každé množiny, pokud je těch množin konečné množství.[29] Tento způsob výběru Moore označuje za první fázi vývoje axiomu výběru. Za zcela přirozený pak můžeme považovat posun k tomu, že matematici začnou vybírat prvek z každé množiny i v případě, že těchto množin je nekonečné množství. Pokud definují pravidlo, podle kterého prvek vybírají, patří takovýto výběr podle Moora do druhé fáze vývoje axiomu výběru. Třetí fázi charakterizuje to, že pravidlo pro výběr prvků z každé množiny, kterých je nekonečné množství,

[24] Cantor, „Beiträge zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre."

[25] Émile Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions* (Paris: Gauthier-Villars et fils, 1898).

[26] Bertrand Russell, *The Principles of Mathematics* (Cambridge: Cambridge University Press, 1903).

[27] Cesare Burali-Forti, „Le classi finite," *Accademia delle Scienze di Torino, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche* 32 (1896): 34–52.

[28] Vybereme-li z množiny libovolný prvek, o kterém dokážeme nějakou vlastnost, pak usoudíme, že tato vlastnost platí o všech prvcích této množiny, jelikož prvek byl vybrán libovolně.

[29] V moderním kontextu „nečiní potíže" chápeme tak, že generalizace se stala axiomem prvořádové logiky a konečný axiom výběru je dokazatelný v teorii množin bez axiomu výběru.

sice existuje, ale matematik jej nepovažuje za podstatné uvést. A pro poslední fázi je typické, že matematik učiní nekonečné množství výběrů, pro které neexistuje žádné pravidlo.

Použití nekonečně mnoha výběrů, bez možnosti stanovit pravidlo pro tento výběr, je charakteristickým znakem čtvrté fáze, která podle Moora začíná v říjnu 1871, kdy Eduard Heine publikoval článek týkající se reálné analýzy, ve kterém zmiňuje tvrzení, dnes obvykle nazývané Heineho věta:

(2.15) Reálná funkce f je spojitá v bodě p, právě když f je sekvenčně spojitá v p.

Věta tvrdí, že platí ekvivalence dvou různých definic spojitosti. Nejprve uvedeme definici Cauchyho a Weierstrasse:

(2.16) Reálná funkce f je spojitá v bodě p, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nějaké $\delta > 0$ takové, že pro každé x z definičního oboru f:

$$|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Druhá definice, která je formulována pomocí posloupností a kterou budeme dále nazývat sekvenční spojitost, zní:

(2.17) Reálná funkce je sekvenčně spojitá v bodě p, pokud pro každou posloupnost $x_0, x_1, \ldots$ konvergující k p, posloupnost $f(x_0), f(x_1), \ldots$ konverguje k $f(p)$.

Cantor ani Heine neuvedli a pravděpodobně tedy netušili, že pro důkaz věty (2.15) je potřeba nějaký nový a zásadní předpoklad. Teprve v prvním desetiletí dvacátého století Michele Cipolla v Itálii a Wacław Sierpiński v Polsku nezávisle poukázali, že pro důkaz věty (2.15) se zdá být nutný axiom výběru (např. ve formě dobrého uspořádání reálných čísel).[30]

Další tvrzení, které zde uvedeme a ve kterém je implicitně použit axiom výběru, je věta, která říká, že následující dvě definice konečnosti jsou ekvivalentní.[31]

(2.18) Množina A je konečná, když pro nějaké přirozené číslo n existuje bijekce mezi n a množinou A, jinak je A nekonečná.

[30] V té době ještě neexistovaly metody, jak ukázat, že axiom výběru je skutečně potřeba. Tato možnost přišla až s objevením metody forcingu Paulem Cohenem v šedesátých letech 20. století; dnes víme, že existuje model teorie ZF obsahující reálnou funkci, která je sekvenčně spojitá, ale ne spojitá. Viz Eduard Heine, „Die Elemente der Functionenlehre," *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 74 (1872): 172–88.

[31] Píšeme „dedekindovsky nekonečná", abychom odlišili obě definice a drželi se současné terminologie. Dedekind samozřejmě tento pojem nepřipisoval sám sobě.

(2.19) Množina A je dedekindovsky nekonečná, když nějaká vlastní podmnožina $B \subset A$ je v bijekci s A, jinak A je dedekindovsky konečná.

Během druhé poloviny devatenáctého století řada matematiků, včetně Cantora a Dedekinda, tvrdila, že tato ekvivalence platí. Už v roce 1878 Cantor v článku, ve kterém dokazuje, že $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ pro libovolné $n > 0$ mají stejnou velikost, říká, že množina A je konečná, když její velikost je nějaké přirozené číslo.[32] Zároveň říká, že pro takovou množinu platí, že každá její vlastní podmnožina má menší velikost, zatímco nekonečná množina A má stejnou velikost, jako nějaká její vlastní podmnožina. Ačkoli to nepodává jako definici konečné a nekonečné množiny, tvrdí tím bez důkazu, že platí ekvivalence mezi větami (2.18) a (2.19), čímž implicitně používá jistou formu axiomu výběru.

Dedekind se k otázce definice konečné (a tedy i nekonečné) množiny explicitně vrací ve své knize *Was sind und was sollen die Zahlen?*[33] z roku 1888, kde uvádí svou definici nekonečna (2.19) a ukazuje, že obě definice jsou ekvivalentní:

(2.20) Každá dedekindovsky konečná množina je konečná v tom smyslu, že existuje bijekce na nějaké přirozené číslo.

V důkazu této věty použil jistou formu axiomu výběru. Z našeho pohledu je důkaz zajímavý tím, že otevřel polemiku ohledně legitimnosti libovolných výběrů. V příspěvku na téma „Dedekind: Was sind und sollen die Zahlen?“ namítá italský matematik Rodolfo Bettazzi před Turínskou akademií věd v roce 1896, že si Dedekind vybere vše libovolně:

> Ale protože existuje více než jedna taková funkce mezi nějakým Z_n a S, a protože Dedekind mezi nimi neurčuje jednu konkrétní, pak je třeba zvolit libovolnou funkci, a učinit tak pro každou množinu funkcí mezi nějakým Z_n a S; to znamená, že je třeba si libovolně vybrat objekt (funkci) v každé z nekonečných množin, což se nezdá přesné; ledaže by někdo chtěl přijmout jako postulát, že takový výběr může být proveden – něco, co se nám však nezdá obhajitelné.[34]

[32] Viz Georg Cantor, „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre,“ *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84 (1878): 242–58.
[33] Richard Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* (Braunschweig: F. Vieweg, 1888).
[34] Rodolfo Bettazzi, „Gruppi finiti ed infiniti di enti,“ *Accademia delle Scienze di Torino, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche* 31 (1896): 512.

Podle Moora Bettazzi libovolné výběry odmítal také kvůli Giuseppe Peanovi, který byl jedním z Bettazziho kolegů na vojenské akademii a již dříve měl námitky vůči používání nekonečně mnoha výběrů. Moore tvrdí, že Peano, který se často účastnil schůzí Akademie věd, mohl být přítomen, když Bettazzi přednášel svůj příspěvek.

Nejasné pojetí axiomu výběru se dále projevuje tím, že Bettazzi nakonec tvrzení (2.20) přijímá, ovšem na základě chybného důkazu, který publikoval Cesare Burali-Forti v roce 1896 v článku „Le classi finite“.[35] Burali-Forti ve svém důkazu použil následující (sporný) předpoklad:

(2.21) Pokud S je systém neprázdných množin, potom S je v bijekci s podmnožinou sjednocení S.

V roce 1906 však Russell upozornil, že tento postulát platí jen v případě, pokud vyžadujeme, že množiny, které jsou prvky systému S, jsou vzájemně disjunktní.[36] Když to vyžadujeme, pak se z principu (2.21) stává tzv. princip rozkladu, který zní následovně:[37]

(2.22) Když je množina M rozložena do systému S vzájemně disjunktních neprázdných množin, potom S je v bijekci s nějakou podmnožinou M.

Když v roce 1904 Zermelo formuloval axiom výběru, uvedl ekvivalenci mezi (2.18) a (2.19) jako jeden z důležitých důsledků axiomu výběru. To stejně nepřesvědčilo Russella, který ještě v roce 1903 ve svém díle *The Principles of Mathematics*[38,39] tvrdil, že množina je konečná, právě když je dedekindovsky konečná (aniž by uvažoval nějakou formu axiomu výběru).

Další tvrzení, která zde zmíníme, jsou tvrzení, která jsou spojená s Cantorem, jelikož ten ve své práci v teorii množin a topologii bodových množin v letech 1877 až 1897 opakovaně implicitně používal axiom výběru. Často

[35] Burali-Forti, „Le classi finite."

[36] Například uvažme následující protipříklad: nechť $S = P(\omega)$, pak S má velikost 2^{ω}, ale $\bigcup S = \omega$, kde ω značí množinu všech přirozených čísel a $P(\omega)$ značí množinu všech podmnožin přirozených čísel.

[37] Ekvivalentní znění principu rozkladu je toto: jestliže existuje funkce f z množiny A do neprázdné množiny B, která je surjektivní (obor hodnot je celá množina B), pak existuje funkce $g : B \to A$, která je prostá.

[38] Russell, *Principles of Mathematics.*

[39] Nezaměňovat s dílem *Principia mathematica*, který Russell napsal s Alfredem N. Whiteheadem. Viz Alfred N. Whitehead and Bertrand Russell, *Principia Mathematica* (Cambridge: Cambridge University Press, 1927).

to byla tvrzení, která Cantor považoval za příliš elementární na to, aby je dokázal. Asi nejznámějším příkladem takového tvrzení je následující věta:

(2.23) Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.

Tuto větu Cantor uvedl ve svém článku z roku 1878[40] jako snadno dokazatelnou a důkaz ponechal na čtenáři.

Dalším příkladem je následující věta, která se opět týká pojmu konečnosti (nekonečná množina – ve smyslu definice, že neexistuje bijekce na žádné přirozené číslo, která nemá spočetnou podmnožinu, je dedekindovsky konečná):

(2.24) Každá nekonečná množina A má spočetnou podmnožinu.

Tuto větu poprvé uvedl Dedekind, avšak dokázal ji v roce 1895 Cantor. Klíčová část důkazu vypadá takto: Nechť T je nekonečná množina. Když pomocí nějakého pravidla odebereme konečný počet prvků t_1, t_2, …, $t_{\nu-1}$, zbývá možnost odebrat další prvek t_ν. Množina $\{t_\nu\}_\nu$, kde ν značí nějaké konečné kardinální číslo, je podmnožina T s kardinálním číslem $\aleph_0$.[41] Vidíme, že Cantor zde alespoň explicitně zmiňuje nutnost nějakého pravidla, ovšem dále ho nespecifikuje.

Pro zajímavost uvedeme na konci této kapitoly několik příkladů implicitního použití axiomu výběru jeho budoucími kritiky. Stávalo se totiž nezřídka, že před rokem 1904 axiom výběru používali jeho budoucí odpůrci, např. René-Louis Baire, Émile Borel, Henri Lebesgue, Bertrand Russell, Alfred North Whitehead a William Henry Young.

Borel ve své knize *Leçons sur la théorie des fonctions*[42] uvádí několik vět, jejichž důkaz potřebuje axiom výběru. Již zmíněnou větu (2.24), kterou zde uvádí i s důkazem, a také větu obdobnou větě (2.23), jež zní:

(2.25) Sjednocení spočetně mnoha množin A_1, A_2, …, každé o mohutnosti kontinua, má také mohutnost kontinua.

V této knize také Borel uvažuje nejmenší σ-algebru množin,[43] která obsahuje všechny otevřené množiny (dnes se jim říká borelovské množiny),

[40] Cantor, „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre."
[41] Georg Cantor, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers* (New York: Dover, 1915), 105.
[42] Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions.*
[43] σ-algebra množin je systém podmnožin dané množiny, který je uzavřený na spočetné průniky, sjednocení a doplňky.

a zkoumá vlastnosti tohoto systému. Na jeho práci v tomto ohledu navázal Lebesgue, který v roce 1902 definuje míru m na reálné ose (obecněji na $\mathbb{R}^n$), jejíž definiční obor je jistý systém omezených podmnožin reálné osy, který zahrnuje všechny borelovské množiny. Míra m splňuje následující:

(i) $m(A) \geq 0$ pro každou množinu A v definičním oboru m,
(ii) m je invariatní vzhledem k posunutí,[44]
(iii) míra spočetně mnoha měřitelných disjunktních množin je součet měr těchto množin (σ-aditivita).

Kromě (i)–(iii) rovněž implicitně předpokládal, že míra úsečky s koncovými body $r_1 < r_2$ je její délka, tj. $m([r_1,r_2]) = m((r_1,r_2)) = r_2 - r_1$.

Lebesgue byl schopen ukázat, že definiční obor m zahrnuje všechny omezené borelovské množiny (dokonce všechny omezené analytické množiny), ale nebyl si jistý, zda m měří všechny omezené podmnožiny. Lebesgueovo váhání se ukázalo jako opodstatněné, protože krátce nato, v roce 1905, sestrojil Giuseppe Vitali[45] za předpokladu existence dobrého uspořádání reálných čísel neměřitelnou podmnožinu intervalu [0,1], která Lebesgueovu míru mít nemůže.[46] Dnes víme, že jistá forma axiomu výběru je nutným předpokladem pro tento výsledek: bez axiomu výběru je konzistentní (pokud navíc existuje tzv. nedosažitelný kardinál), že všechny omezené podmnožiny jsou měřitelné.[47] Zmiňme také, že spočetná aditivita Lebesgueovy míry předpokládá spočetný axiom výběru.[48,49] Na to poprvé upozornil Sierpińsky až v roce 1916, ale nedal k tomu žádné podrobnosti.[50]

Ačkoli byly v matematice před rokem 1904 (kdy Zermelo axiom výběru explicitně formuloval v rámci svého důkazu) často používány libovolné výběry, viděli jsme, že používání axiomu výběru v nějaké podobě bylo před

[44] Tedy pro každou měřitelnou $A \subseteq \mathbb{R}$ a reálné číslo r je $m(A) = m(A + r)$, kde $A + r = \{a + r \mid a \in A\}$. Je lehké ověřit, že to např. implikuje, že $m(\{r\}) = 0$ pro každé $r \in \mathbb{R}$.
[45] Viz Giuseppe Vitali, *Sul problema della misura dei Gruppi di punti di una retta* (Bologna: Tip. Gamberini e Parmeggiani, 1905).
[46] Thomas Jech, *The Axiom of Choice* (Princeton, NJ: North-Holland, 1973), 8.
[47] Viz Robert M. Solovay, „A Model of Set Theory in Which Every Set of Reals is Lebesgue Measurable,“ *Annals of Mathematics* 92 (1970): 1–56.
[48] Viz Solomon Feferman and Azriel Lévy, „Independence Results in Set Theory by Cohen's Method,“ *Notices of the American Mathematical Society* 10 (1963): 592–93.
[49] V modelu ZF zkonstruovaným Solomonem Fefermanem a Azrielem Lévym v roce 1963 je $\mathbb{R}$ spočetné sjednocení spočetných množin, a tudíž Lebesgueova míra není σ-aditivní v tomto modelu.
[50] Viz Wacław Sierpiński, „Sur Ie rôle de l'axiome de M. Zermelo dans I'analyse moderne,“ *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de I'Académie des Sciences* 163 (1916): 688–91.

rokem 1904 často přehlíženo nebo nebylo pokládáno za příliš zásadní. Skutečných odpůrců však byl v té době málo. Zmiňme jen Peana, který v roce 1890 ve svém článku „Demonstration de I'intégrabilité des equations differentielles ordinaires“[51] pracoval s pojmem spojitosti a potřeboval vybrat jeden prvek z každé ze spočetně mnoha množin A_n, k čemuž poznamenává:

> Jelikož však nelze nekonečně mnohokrát použít libovolné pravidlo, kterým se přiřadí třídě *A* prvek této třídy, uvádíme zde přesně určené pravidlo, pomocí kterého lze za vhodných předpokladů přiřadit každé třídě *A* prvek této třídy.[52]

Moore ho označuje za prvního matematika, který, i když přijímal nekonečné třídy, kategoricky odmítal použití nekonečně mnoha libovolných výběrů.[53]

V dalších kapitolách budeme sledovat situaci ohledně axiomu výběru a hypotézy kontinua v kontextu matematických výsledků, kde jsou tyto předpoklady použity. Od počáteční nejistoty ohledně (hlavně) axiomu výběru, která byla často spojena s „filosofickými“ otázkami, začne převažovat pragmatický zřetel.

3. Axiom výběru a hypotéza kontinua v matematice

Je dobré si uvědomit, že mnoho důsledků axiomu výběru a případně hypotézy kontinua bylo dokázáno v době, kdy ještě nebylo známo, zda jsou tyto předpoklady bezesporné. Z hlediska tehdejší matematiky nebylo vyloučeno, že např. Vitaliho důkaz, že existuje lebesgueovsky neměřitelná množina, ve skutečnosti nic o měřitelných množinách neříká, protože existence dobrého uspořádání reálné osy či existence výběrové funkce na podmnožinách R mohly být sporné předpoklady. Tato ambivalence a nejistota se promítala do úvah a komentářů matematiků kolem axiomu výběru a hypotézy kontinua v prvních třech desetiletích 20. století.

Teprve výsledky Kurta Gödela z první poloviny 30. let dvacátého století ukázaly, že pokud jsou axiomy teorie množin bezesporné bez axiomu výběru (nebo hypotézy kontinua), tak zůstanou bezesporné i po jejich přidání. Tedy např. existence dobrého uspořádání reálné osy sama o sobě ke sporu nevede. Gödelovy výsledky nicméně nezodpověděly otázku, zda už nejsou oba principy dokazatelné z ostatních axiomů teorie množin. Teprve v první

[51] Viz Giuseppe Peano, „Demonstration de I'integrabilite des equations differentielles ordinaires,“ *Mathematische Annalen* 37 (1890): 182–228.

[52] Ibid., 210.

[53] Moore, *Zermelo's Axiom of Choice*, 76.

polovině 60. let dvacátého století Paul Cohen dokázal metodou *forcingu*, že ani přidání negace obou tvrzení ke sporu nevede,[54] za což roku 1966 získal Fieldsovu medaili.

Ambivalence způsobená nejistotou ohledně konzistence těchto axiomů tedy zmizela, nicméně se objevila přirozená otázka ohledně „pravdivosti“ (v naivním smyslu) obou předpokladů: můžeme používat tyto axiomy v jejich pozitivní ale i negativní podobě; podle kterých kritérií máme volit? Můžeme usuzovat, že matematici se ve skutečnosti rozhodovali povětšinou podle bohatosti důsledků a „elegance“ či „krásy“ vzniklé teorie. Tento přístup vede přirozeně k přijetí axiomu výběru, nicméně u hypotézy kontinua situace tak jednoznačná není, jak uvidíme níže.

3.1 Axiom výběru

Axiom výběru se v matematických důkazech objevuje ve více formách. Někdy k důkazu postačují slabší tvrzení, které je axiomem výběru implikováno. Mezi taková patří již zmíněná tvrzení: spočetný axiom výběru (2.13) a princip závislých výběrů (2.14). Dále se v důkazech velmi často využívají tvrzení, která jsou axiomu výběru ekvivalentní, což je již uvedená věta o dobrém uspořádání (2.3) a princip maximality, který se také nazývá Zornovo lemma. Tento princip zní:

> (3.26) Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina taková, že každý neprázdný řetězec v A má horní mez. Potom nad každým prvkem v A existuje maximální prvek v uspořádání $\leq$.

Kde řetězcem rozumíme jakoukoliv podmnožinu $B \subseteq A$, že pro všechna x, y v B buď $x \leq y$, nebo $y \leq x$ (tedy uspořádání $\leq$ je na B lineární). Zornovo lemma se často používá místo axiomu výběru, protože se vyhýbá množinově-teoretickým pojmům jako dobré uspořádání nebo výběrová funkce, které nahrazuje jednoduchými pojmy jako maximální prvek, které jsou matematikům bližší.

Tento princip se v trochu jiném (ale ekvivalentním) znění objevil již na počátku století v pracích německého matematika Felix Hausdorffa[55]

[54] Viz Paul J. Cohen, „The Independence of the Continuum Hypothesis,“ *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 50, no. 6 (1963): 1143–48.
[55] Felix Hausdorff, „Die Graduierung nach dem Endverlauf,“ *Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig* 61 (1909): 297–334.

(1909), polského matematika Kazimierza Kuratowského[56] (1922) a konečně v roce 1935 v díle německého matematika Maxe Zorna.[57] Na rozdíl od Hausdorffa a Kuratowskiho Zorn nepovažoval toto tvrzení za větu, ale za axiom a sám ho nazval principem maximality. Formuloval ho proto, že princip dobrého uspořádání pokládal za příliš komplikovaný a (správně) očekával, že jeho princip povede k elegantnějším a přímějším důkazům v algebře a dalších klasických matematických oborech.

Je známo mnoho důsledků axiomu výběru. Naším cílem není zde poskytnout úplný výčet, ale dát čtenáři aspoň základní představu o jejich charakteru: některé důsledky se zdají být intuitivně „správné", „zřejmé" či „užitečné", zatímco jiné mohou působit paradoxně nebo až nesprávně. Podrobný výčet důsledků může čtenář nalézt například v publikaci *Consequences of the Axiom of Choice* od Jeana E. Rubina a Paula Howarda[58] či méně obsáhlý výčet, ale s podrobnými důkazy v knize *The Axiom of Choice* od Tomáše Jecha.[59]

Mezi těmi „správnými" či „užitečnými" důsledky axiomu výběru uveďme např. následující věty, (i) každý vektorový prostor má bázi, (ii) každé těleso má jedinečný (až na izomorfismus) algebraický uzávěr, (iii) každý vlastní filtr může být rozšířen do ultrafiltru, (iv) již zmíněnou větu (2.23), že sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetná množina a (v) Heineho větu (2.15) o charakterizaci spojitosti. Není s podivem, že poslední dvě věty jsme uvedli již v kapitole věnované historickému kontextu, neboť je přirozené, že axiom výběru vstoupil do matematiky právě s větami, které matematici považovali za užitečné.

Pro ilustraci uveďme trochu podrobněji důkaz, že sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné, aby čtenář sám posoudil intuitivnost takového důkazu. Předpokládejme pro jednoduchost, že $\{X_i \mid i < \omega\}$ je systém spočetných vzájemně disjunktních množin. Ukážeme, jak sestrojit bijekci na $\omega \times \omega$, to je dostačující, protože $\omega \times \omega$ má velikost ω.[60] Pro každé i tak můžeme definovat množinu F_i, která obsahuje všechny bijekce

[56]Kazimierz Kuratowski, „Une méthode d'elimination des nombres transfinis des raisonnements mathematiques," *Fundamenta Mathematicae* 3 (1922): 76–108.

[57] Max Zorn, „A Remark on Method in Transfinite Algebra," *Bulletin of the American Mathematical Society* 41 (1935): 667–70.

[58] Paul Howard and Jean E. Rubin, *Consequences of the Axiom of Choice* (Providence, RI: American Mathematical Society, 1998).

[59] Jech, *Axiom of Choice*.

[60] Podle Cantorovy-Bernsteinovy věty stačí ověřit, že existuje prostá funkce z ω do $\omega \times \omega$ a naopak. Např. funkce $f : \omega \times \omega \to \omega$ definovaná předpisem $f(\langle m, n\rangle) = 2^m 3^n$ je prostá. Funkce $g(n) = \langle n, 0\rangle$ je prostou funkcí z ω do $\omega \times \omega$.

z X_i na ω (protože předpokládáme, že X_i je spočetná, je F_i neprázdná množina). Jelikož předpokládáme AC, existuje na množině $\{F_i \mid i < \omega\}$ výběrová funkce f . Označme $f_i = f(F_i)$. Je snadné ověřit, že funkce g, která přiřazuje prvku x v X_i hodnotu $(i, f_i(x))$ je bijekcí mezi $\{X_i \mid i < \omega\}$ a $\omega \times \omega$. Všimněme si, že nám stačil spočetný axiom výběru, protože systém $\{F_i \mid i < \omega\}$ je spočetný. Možnost vybrat f_i z každé množiny F_i naráz pro všechny $i < \omega$ se zdá jako intuitivně přijatelný krok, protože to můžeme udělat pro každé $i < \omega$ zvlášť. Nicméně, jak jsme popisovali výše, nemožnost udělat tento výběr vždy explicitním mohla být chápána jako problematická (viz Peanův komentář výše na konci kapitoly 2.3).

Zastavme se nyní krátce také u některých paradoxních důsledků axiomu výběru. Nejčastěji uváděný takový důsledek je, že existuje omezená podmnožina reálných čísel, která není lebesgueovsky měřitelná, jak jsme již popsali na konci kapitoly 2.3. Jiným důsledkem axiomu výběru je tzv. Banachův-Tarského paradox, který je známý pod populárním a neformálním zněním, že kouli v prostoru $\mathbb{R}^3$ lze rozřezat na konečně mnoho dílů a přeskládat na dvě koule shodné s původní koulí. Jiná forma tohoto paradoxu říká, že lze takto rozřezat čtverec na reálné ploše $\mathbb{R}^2$ a složit z něj kruh se stejným obsahem.[61]

Tato ambivalence je pro axiom výběru charakteristická. Na jedné straně jsou věty, které jsou v „běžné“ matematice používány, bez jakéhokoli podezření, že v jejich důkazu se používá předpoklad, který by někdo mohl považovat za neodůvodněný nebo dokonce chybný. Na straně druhé věty, které nám přijdou tak nepravděpodobné, že je nazýváme paradoxem.[62] Otázkou zůstává, jak se s touto dvojakostí vyrovnat.

Jak jsme popisovali, většina matematiků se rozhodla axiom výběru přijmout, a tedy ty „správné“ důsledky převážily. Navíc, jak jsme zmínili v poznámce 54, mnohdy se ukázalo, že zdánlivě paradoxní důsledek vedl k podrobnějšímu výzkumu dané oblasti (jako např. u Lebesgueovy míry).

Na závěr této kapitoly se krátce věnujme negaci axiomu výběru. Je zřejmé, že negace axiomu výběru je samo o sobě velmi slabé tvrzení: totiž že existuje množina, na které neexistuje výběrová funkce – takové tvrzení

[61] Je zajímavé, že v těchto výsledcích nelze volně měnit dimenzi prostoru: i s axiomem výběru je sporné předpokládat, že kružnici na reálné ploše lze přeskládat do dvou kružnic shodných s původní kružnicí (protože takové přeskládání musí zachovat obsah, zatímco pro objem to nutné není; technické podrobnosti jsou nicméně mimo rámec tohoto článku).

[62] Takový paradox ovšem můžeme chápat také pozitivně v tom smyslu, že ačkoli nám nějaký důsledek nejprve přijde paradoxní, je to jen proto, že jsme dané problematice dosud správně nerozuměli a že je komplexnější než naše původní (naivní) očekávání.

těžko pomůže v důkazu nějakého matematicky zajímavého tvrzení. Aby mohla být negace výběru skutečně považována za alternativu k axiomu výběru, je třeba, aby měla také nějaký „pozitivní“ obsah. Takové tvrzení bylo skutečně objeveno, jedná se o tzv. *axiom determinovanosti*, zkráceně AD, který byl poprvé formulován v roce 1962 polským matematikem Hugem Steinhausem[63] a který stejně jako axiom výběru přirozeně platí pro konečné množiny. Axiom determinovanosti je tvrzení, že pro každou $A \subseteq \omega^\omega$ je hra G_A determinovaná.[64] AD implikuje DC, ale také implikuje, že reálná čísla nelze dobře uspořádat. Axiom determinovanosti se i přes počáteční naděje některých množinových teoretiků (např. Hugh Woodin) neprosadil jako alternativa k axiomu výběru.

3.2 Hypotéza kontinua

V této kapitole se zaměříme na popsání některých důsledků hypotézy kontinua a vyzdvihnutí rozdílu oproti axiomu výběru. Neklademe si za cíl uvést kompletní výčet těchto důsledků.[65] Hypotézu kontinua budeme uvažovat pouze v kontextu axiomu výběru, jak je obvyklé.[66]

Samotná otázka, kolik je reálných čísel, tedy který kardinál odpovídá mocnině $2^{\aleph_0}$, je na první pohled velmi přirozená. Avšak *a priori* se nenabízí žádná přirozená odpověď, kterou bychom měli očekávat. Historicky vzato je jistá preference pro tvrzení $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ – když opomineme zdánlivou

[63] Jan Mycielski and Hugo Steinhaus, „A Mathematical Axiom Contradicting the Axiom of Choice,“ *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques* 10 (1962): 1–3.

[64] Každou podmnožinu $A \subseteq \omega^\omega$ můžeme spojit s následující hrou G_A. G_A je hrána dvěma hráči I. a II., I. hráč vybere přirozené číslo a_0, II. hráč vybere přirozené číslo b_0, I. hráč vybere přirozené číslo a_1 a II. hráč vybere přirozené číslo b_1 atd. Hra končí po ω krocích. Pokud výsledná posloupnost $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots\rangle$ leží v A, potom I. hráč vyhraje, jinak vyhraje II. hráč. Výherní strategie je funkce z konečných posloupností přirozených čísel do přirozených čísel, která říká, jaký tah má hráč udělat v závislosti na předchozích krocích. Říkáme, že hra G_A je determinovaná, pokud jeden z hráčů má výherní strategii. Lze ukázat bez dodatečných předpokladů, že všechny borelovské množiny A jsou determinované.

[65] Poznamenejme, že to není snadná věc. Existuje kniha *Hypothèse Du Continu* od Sierpińskiho, která uvádí mnoho důsledků hypotézy kontinua, ale je již relativně zastaralá. Moderní přehled těchto důsledků postavený do dalšího kontextu vývoje teorie množin, hlavně pokud jde o metodu forcingu, chybí. Viz Wacław Sierpiński, *Hypothèse Du Continu* (Warszawa: Subwencji Funduszu Kultury Narodowej, 1934).

[66] Aniž bychom šli do detailů, můžeme zmínit, že bez axiomu výběru mají různé verze hypotézy kontinua jinou informační hodnotu (bez axiomu výběru nemusí být reálná čísla v bijekci s žádným kardinálním číslem).

jednoduchost takového řešení – daná částečnými výsledky, hlavně Cantor-Bendixsonovou větou, kterou jsme již zmínili výše. Cantor-Bendixsonovu větu se postupně podařilo rozšířit až na všechny analytické množiny, ale zde se postup zastavil. Hlavní ideou této věty a jejích zobecnění je ukázat, že každá nespočetná množina (uzavřená, borelovská, analytická) obsahuje tzv. „perfektní množinu“, pro kterou je snadné ukázat, že má velikost $2^{\aleph_0}$. Brzy však ukázal Bernstein,[67] že dobré uspořádání reálných čísel umožňuje diagonalizací sestrojit podmnožinu reálné osy velikosti $2^{\aleph_0}$, která neobsahuje žádnou perfektní podmnožinu. Tento výsledek zablokoval strategii, jak ukázat hypotézu kontinua postupným rozšiřováním Cantor-Bendixsonovy věty.[68] Žádný další způsob nalezen nebyl, a dnes díky Cohenovým výsledkům víme, že ani nalezen být nemohl: je bezesporné předpokládat, že existuje nespočetná podmnožina reálné osy, která nemá velikost kontinua.

Dalším často citovaným argumentem pro tvrzení $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ je Gödelova konstrukce tzv. *konstruovatelného* univerza *L*, kterým ukázal relativní bezespornost axiomu výběru i hypotézy kontinua.[69] Konstrukce univerza *L* se zdála být velmi přirozenou, a tedy ukazovala ve prospěch hypotézy kontinua. Na druhé straně sám Gödel byl ohledně „správnosti“ *L* skeptický a mluvil o konstruovatelném univerzu jako technickém nástroji, jak ukázat konzistenci obou principů.[70] Následně se ukázalo, že *L* nemůže obsahovat jisté velké kardinály, když Dana Scott[71] ukázal, že existence měřitelného kardinálu implikuje, že univerzum množin se nerovná konstruovatelnému univerzu *L*. Vzhledem k narůstající důležitosti velkých kardinálů tím *L* přišlo o mnoho ze své přitažlivosti.[72]

[67] Felix Bernstein, „Zur theorie der trigonometrischen reihen,“ *Sitzungsberichte der Königlich Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physikalische Klasse* 60 (1908): 325–38.

[68] Za existence jistých velkých kardinálů lze Cantor-Bendixsonovu větu zobecnit dokonce na všechny projektivní množiny, ale to přesahuje zaměření tohoto článku.

[69] Kurt Gödel, „The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis,“ *Proceedings of the National Academy of Sciences*, no. 24 (1938): 556–57.

[70] Kurt Gödel, *Filosofické eseje* (Praha: Oikoymenh, 1999).

[71] Dana Scott, „Measurable Cardinals and Constructible Sets,“ *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences* 9 (1961): 521–24.

[72] Sám Gödel ve svých esejích vyjádřil naději, že velké kardinály by mohly vést k rozhodnutí hypotézy kontinua. Výsledky Roberta M. Solovaye však v 70. letech ukázaly, že tomu tak není: dnes známé velké kardinály hypotézu kontinua z povahy věci rozhodnout nemohou. Viz Gödel, *Filosofické eseje*.

Jak jsme již zmínili, Sierpiński[73] dokázal řadu tvrzení, které plynou z hypotézy kontinua. Jedná se často o komplikovaná tvrzení, ale není zřejmé, jestli bychom je měli přijmout jako ta „správná" řešení. Koneckonců jedná se o důsledky kardinální aritmetiky, a tedy se všechny týkají počtu nějakých objektů. Uveďme jeden typický příklad, který pochází z pozdější doby, ať čtenář sám posoudí, zda ukazuje směrem k hypotéze kontinua nebo její negaci. Roku 1962 John E. Wetzel položil následující otázku:[74]

(3.27) Nechť I je neprázdná množina a $\{ f_\alpha \mid \alpha \in I \}$ je množina po dvou různých analytických funkcí na komplexních číslech $\mathbb{C}$ takových, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ je množina hodnot $\{ f_\alpha(z) \mid \alpha \in I \}$ spočetná. Nazvěme tuto vlastnost (P_0). Plyne z (P_0), že množina $\{ f_\alpha \mid \alpha \in I \}$ je také spočetná?

Nedlouho poté Paul Erdös[75] ukázal, že odpověď závisí na hypotéze kontinua: jestliže hypotéza kontinua platí, pak je odpověď záporná, zatímco negace hypotézy kontinua implikuje kladnou odpověď.

Absence přesvědčivých důvodu pro hypotézu kontinua nebo její negaci vedla k podrobnějšímu zkoumání modelů, ve kterých hypotéza kontinua platí nebo naopak neplatí. Ukazuje se, že jak pro CH i ¬CH existuje řada principů, které jsou ostře silnější a jejichž užitečnost je vyšší než užitečnost samotné hypotézy kontinua nebo její negace.

Detailní analýza univerza konstruovatelných množin L Ronadlem Jensenem v 70. letech vedla k objevení mnoha kombinatorických principů, které platí v L, ale je možné je použít i samostatně jako dodatečný předpoklad. V kontextu hypotézy kontinua je zajímavý tzv. diamantový princip, $\Diamond$, který říká, že existuje posloupnost $S = \langle S_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ taková, že $S_\alpha \subseteq \alpha$ pro každé $\alpha < \omega_1$ a je-li $X \subseteq \omega_1$ libovolná množina, pak na nespočetně mnoha[76] $\alpha < \omega_1$ posloupnost S „uhádne" X v tom smyslu, že $S_\alpha = X \cap \alpha$. Není těžké ukázat, že $\Diamond$ implikuje CH.

Na druhé straně vedl výzkum forcingu k objevení tzv. *forcingových axiomů*, které představují v jistém smyslu protipól vlastností platných v L. Všechny tyto axiomy implikují ¬CH. Nejznámější je *Martinův axiom*, MA,[77]

[73] Viz Sierpiński, *Hypothèse Du Continu*.

[74] Martin Aigner and Günter Ziegler, *Proofs from THE BOOK* (Berlin: Springer, 1998), 95.

[75] Paul Erdös and Tibor Grünwald, „On Polynomials With Only Real Roots," *Annals of Mathematics* 40 (1939): 537–48.

[76] Přesněji řečeno na *stacionárně* mnoha bodech, což je technický termín, který ale není pro náš výklad důležitý.

[77] Striktně vzato se MA formuluje s dodatečným kardinálním parametrem κ: MA_κ. MA_ω je v tomto smyslu dokazatelné v ZFC. Pro účely tohoto článku chápeme MA jako MA_{ω_1}, což

a jeho silnější verze, *Proper Forcing Axiom*, PFA. Zatímco MA implikuje pouze $2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$, PFA už implikuje $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Z hlediska diskuze v tomto článku je podstatné, že oba principy, totiž $\Diamond$ a MA (nebo případně PFA), často hrají v matematických výsledcích roli, kterou bychom možná naivně očekávali od CH a ¬CH. Např. překvapivá nezávislost slavného matematického problému tzv. Whiteheadových abelovských grup byla prokázána Saharonem Shelahem tak, že dokázal, že za předpokladu principu $\Diamond$ je každá Whiteheadova grupa volná, zatímco MA implikuje, že existuje Whiteheadova grupa, která volná není.[78]

Na rozdíl od axiomu výběru jsou však důkazy z principů $\Diamond$ a MA velmi technické a jejich výklad přesahuje hranice tohoto článku. Zopakujme jen, že existují zesílení hypotézy kontinua a její negace, které mají netriviální matematické důsledky. Nicméně pořád není zřejmé, který důsledek je ten „správný“: v kontextu našeho příkladu prostě není zřejmé, zda by každá Whiteheadova grupa měla být volná nebo ne.

4. Shrnutí

V textu jsme se zaměřili na porovnání dvou tvrzení, hypotézy kontinua a axiomu výběru, z hlediska jejich historie, současné matematiky a z hlediska jejich vztahu k dalším tvrzením.

Historický kontext těchto tvrzení ukázal, že historie axiomu výběru je dlouhá, v širokém významu axiomu výběru sahá do dob Eukleidových. Pro nás je však důležité, že např. již v roce 1871 byl při důkazu Heineho věty implicitně použit axiom výběru nebo také, že v roce 1878 Cantor použil implicitně spočetný axiom výběru ve svém důkazu věty, že sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné. Takových příkladů bylo v textu uvedeno více. Podstatné je, že tyto důkazy byly uvedeny téměř tři desítky let před explicitní formulací axiomu výběru Zermelem v roce 1904. To nám ukazuje, že axiom výběru je jistým způsobem intuitivní. A že má podobný rys jako ostatní axiomy teorie množin, tedy jistou „samozřejmost“.

Naproti tomu hypotéza kontinua byla formulována Cantorem v roce 1878 v kontextu jím zavedených nekonečných kardinálních čísel, aniž by se předtím objevila v matematických argumentech jako problém. Určitě tedy můžeme v kontrastu k AC tvrdit, že CH postrádá podobnou „samozřejmost“.

implikuje ¬CH.

[78] Viz Eklofův článek, který celý argument přehledně shrnuje: Paul C. Eklof, „Whitehead’s Problem is Undecidable,“ *The American Mathematical Monthly* 83 (1976): 775–88.

Srovnali jsme tato tvrzení na základě současné matematiky a jejich důsledků. Viděli jsme, že axiom výběru má mnoho důsledků, které můžeme považovat za „správné“, totiž v souladu s matematickou intuicí či užitečné v tom smyslu, že vedou k elegantní teorii. Pro připomenutí mezi ně patří například věty, že každý vektorový prostor má bázi, že pro každé těleso existuje jedinečný (až na izomorfismus) algebraický uzávěr, nebo že sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné. AC má rovněž některé neintuitivní důsledky, např. že existuje neměřitelná podmnožina reálných čísel nebo Banachův-Tarského paradox. Nicméně vzhledem k převaze intuitivně zřejmých důsledků začali matematici i tyto na první pohled paradoxy vidět jako tvrzení, která jsou sice nečekaná, ale právě tím obohacují naše chápání např. reálných čísel.

Jak jsme zmínili v kapitole 2.3, CH platí pro borelovské množiny, se kterými se často přirozeně setkáme v matematické analýze.[79] Tedy možná není tak nečekané, že v alespoň některých částech matematiky chybí přirozené příklady tvrzení, které jsou rozhodnuty hypotézou kontinua nebo jeho negací. Wetzelův problém zmíněný v (3.27) je spíše výjimkou než pravidlem. Nicméně jsme naznačili, že hypotéza kontinua – ať máme na její důležitost jakýkoli názor – je z matematického hlediska slabým předpokladem a že existují přirozená zesílení této hypotézy nebo její negace, které již netriviální důsledky mají (viz Whiteheadův problém zmíněný výše).

Jako hlavní výsledek porovnání axiomu výběru a hypotézy kontinua tak vystupuje skutečnost, že zatímco axiom výběru již nelze netriviálně zesílit a má tedy bohatou škálu důsledků (těch intuitivně správných i paradoxních), tak hypotéza kontinua je relativně slabým tvrzením. Je to do jisté míry nečekané: jako by přesný počet reálných čísel nebyl příliš významný. Zdá se, že mnohem větší důležitost mají další kombinatorické principy, které často velikost reálných čísel rozhodují (viz např. *Proper Forcing Axiom* zmíněný výše). V tomto smyslu mnozí matematici nepokládají problém hypotézy kontinua za vyřešený: stále existuje možnost, že bude nalezen silnější princip, který rozhodne hypotézu kontinua, a navíc bude mít bohatou řadu důsledků a bude tak alespoň z části přesvědčivý jako axiom výběru.

[79] Borelovských množin je z hlediska kardinality málo, jen $2^{\aleph_0}$, ale z hlediska topologických vlastností reálné osy (např. spojitost) jsou velmi podstatné a slouží k charakterizaci mnoha konceptů: např. body nespojitosti libovolné reálné funkce jsou vždy borelovská množina apod.

Bibliografie:

Aigner, Martin, and Günter Ziegler. *Proofs from THE BOOK*. Berlin: Springer, 1998. https://doi.org/10.1007/978-3-662-22343-7.

Bernstein, Felix. „Zur theorie der trigonometrischen reihen." *Sitzungsberichte der Königlich Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physikalische Klasse* 60 (1908): 325–38.

Bettazzi, Rodolfo. „Gruppi finiti ed infiniti di enti." *Accademia delle Scienze di Torino, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche* 31 (1896): 506–12.

Borel, Émile. *Leçons sur la théorie des fonctions*. Paris: Gauthier-Villars et fils, 1898.

Burali-Forti, Cesare. „Le classi finite." *Accademia delle Scienze di Torino, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche* 32 (1896): 34–52.

Cantor, Georg. „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 77 (1874): 258–62. https://doi.org/10.1515/crll.1874.77.258.

Cantor, Georg. „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84 (1878): 242–58. https://doi.org/10.1515/crll.1878.84.242.

Cantor, Georg. „Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten." *Mathematische Annalen* 21 (1883): 545–91. https://doi.org/10.1007/BF01446819.

Cantor, Georg. „Beiträge zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre." *Mathematische Annalen* 47 (1895): 481–512. https://doi.org/10.1007/BF02124929.

Cantor, Georg. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, New York: Dover, 1915.

Cantor, Georg. *Briefe*. New York: Springer, 1991. https://doi.org/10.1007/978-3-642-74344-3.

Cohen, Paul J. „The Independence of the Continuum Hypothesis." *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 50, no. 6 (1963): 1143–48.

Dedekind, Richard. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: F. Vieweg, 1888.

Eklof, Paul C. „Whitehead's Problem is Undecidable." *The American Mathematical Monthly* 83 (1976): 775–88. https://doi.org/10.1080/00029890.1976.11994250.

Erdös, Paul, and Tibor Grünwald. „On Polynomials With Only Real Roots." *Annals of Mathematics* 40 (1939): 537–48. https://doi.org/10.2307/1968938.

Feferman, Solomon, and Azriel Lévy. „Independence Results in Set Theory by Cohen's Method.“ *Notices of the American Mathematical Society* 10 (1963): 592–93.

Gödel, Kurt. „The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis.“ *Proceedings of the National Academy of Sciences*, no. 24 (1938): 556–57. https://doi.org/10.1073/pnas.24.12.556.

Gödel, Kurt. *Filosofické eseje*. Praha: Oikoymenh, 1999.

Hausdorff, Felix. „Die Graduierung nach dem Endverlauf.“ *Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig* 61 (1909): 297–334.

Heine, Eduard. „Die Elemente der Functionenlehre.“ *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 74 (1872): 172–88. https://doi.org/10.1515/crll.1872.74.172.

Howard, Paul, and Jean E. Rubin. *Consequences of the Axiom of Choice*. Providence, RI: American Mathematical Society, 1998. https://doi.org/10.1090/surv/059.

Jech, Thomas. *The Axiom of Choice*. Princeton, NJ: North-Holland, 1973.

Jourdain, Philip E. B. „On Transfinite Cardinal Numbers of the Exponential Form.“ *Philosophical Magazine* 9, no. 49 (1905): 42–56. https://doi.org/10.1080/14786440509463254.

Kuratowski, Kazimierz. „Une méthode d'elimination des nombres transfinis des raisonnements mathematiques.“ *Fundamenta Mathematicae* 3 (1922): 76–108. https://doi.org/10.4064/fm-3-1-76-108.

Martin, Donald A. „Hilbert's First Problem: The Continuum Hypothesis.“ *Proceeding of Symposia in Pure Matematics* 28 (1976): 81–92. https://doi.org/10.1090/pspum/028.1/0434826.

Moore, Gregory H. *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence*. New York: Springer, 1982. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9478-5.

Mycielski, Jan, and Hugo Steinhaus. „A Mathematical Axiom Contradicting the Axiom of Choice.“ *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques* 10 (1962): 1–3.

Peano, Giuseppe. „Demonstration de I'integrabilite des equations differentielles ordinaires.“ *Mathematische Annalen* 37 (1890): 182–228. https://doi.org/10.1007/BF01200235.

Russell, Bertrand. *The Principles of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1903.

Scott, Dana. „Measurable Cardinals and Constructible Sets.“ *Bulletin de l’Académie Polonaise des Sciences* 9 (1961): 521–24.

Sierpiński, Wacław. „Sur Ie rôle de l’axiome de M. Zermelo dans I’analyse moderne.“ *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de I’Académie des Sciences* 163 (1916): 688–91.

Sierpiński, Wacław. *Hypothèse Du Continu*. Warszawa: Subwencji Funduszu Kultury Narodowej, 1934.

Solovay, Robert M. „A Model of Set Theory in Which Every Set of Reals is Lebesgue Measurable.“ *Annals of Mathematics* 92 (1970): 1–56. https://doi.org/10.2307/1970696.

Vitali, Giuseppe. *Sul problema della misura dei Gruppi di punti di una retta*. Bologna: Tip. Gamberini e Parmeggiani, 1905.

Whitehead, Alfred N., and Bertrand Russell. *Principia Mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press, 1927.

Zorn, Max. „A Remark on Method in Transfinite Algebra.“ *Bulletin of the American Mathematical Society* 41 (1935): 667–70. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1935-06166-X.