////// studie / article //

VÝKLADY BOETHIOVA ÚVODU DO ARITMETIKY II, 1 NA SKLONKU 10. STOLETÍ

Abstrakt: *Tato studie se věnuje komentářům a glosám k první kapitole druhé knihy Boethiova Úvodu do aritmetiky, jejímiž autory v poslední čtvrtině 10. století byli Gerbert z Aurillacu (*Scholium ad Boethii Arithmeticam Institutionem *l. II, c. 1), Abbo z Fleury (komentář ke spisu* Calculus *od Viktorina z Akvitánie, tzv.* De numero, mensura et pondere*), Notker z Lutychu (*De superparticularibus*) a anonymní autor textu* De arithmetica Boetii. *Studie sleduje dva hlavní cíle: nejprve upozorňuje na to, že Boethiův text o převodu číselných posloupností na stejnost lze interpretovat dvěma rozdílnými způsoby, následně se zaměřuje na využití této problematiky v dalších svobodných uměních a při hraní deskové hry rithmomachie.*

Klíčová slova: *aritmetika; číselné posloupnosti; Boethius; 10. století*

Explanations of Boethius's Introduction to Arithmetic II, 1 at the End of 10th Century

Abstract: *This paper deals with commentaries and glosses to the first chapter of the second book of Boethius's Introduction to Arithmetic written by Gerbert of Aurillac (*Scholium ad Boethii Arithmeticae Institution *l. II, c. 1), Abbo of Fleury (commentary on the* Calculus *of Victorius of Aquitaine, the so-called* De numero, mensura et pondere*), Notker of Liège (*De superparticularibus*) and by the anonymous author (the text* De Arithmetica Boetii*) in the last quarter of the 10^{th} century. This paper follows two main topics: firstly, Boethius's work implies possibility of double interpretations of converting numerical sequences to equality; secondly, applications of this topic in other liberal arts and in playing board game called rithmomachia.*

Keywords: *arithmetic; numerical sequences; Boethius; 10^{th} century*

MAREK OTISK
Katedra filosofie FF OU v Ostravě
Reální 5, 701 03 Ostrava
email / marek.otisk@osu.cz

I.

Minimálně od dob pythagorejců je ve filosofických debatách často opakovanou skutečností, že matematika a čísla nejsou pouze nástrojem k zachycení kvantitativní stránky reality, nýbrž že matematické disciplíny (tedy ty, které budou později označovány jako tzv. *quadrivium* – tj. aritmetika, geometrie, astronomie a hudba[1]) jsou nezbytnou součástí ontologicko-metafyzického, teologického, noeticko-antropologického, kosmologického a dalšího podobného bádání. Božská Jednotka, precizní a dokonalý řád určující přírodní dění nebo hudba sfér, to je jen stručný výběr témat, která z nauky o číslech činí umění, jež má svou vazbu k samotné podstatě veškerenstva.

Ve formující se středověké latinské Evropě před rokem 1000 byl filosofický a teologický rozměr matematických umění (zejména pak aritmetiky jakožto první z matematických disciplín)[2] autoritativně zaštítěn např. Aureliem Augustinem, který na mnoha místech svého díla vyzdvihl matematiku (a aritmetiku zvlášť) jako velmi užitečný exegetický nástroj,[3] jako cestu k Bohu, případně jako samotný výraz Boží moudrosti (řád čísel je Augustinem označen jako soupodstatný se samotným Bohem).[4] Základní učebnicí pro první vědu *quadrivia* pak byl Boethiův *Úvod do aritmetiky*, latinská adaptace, resp. volný překlad, stejnojmenného řeckého spisu novopythagorejského matematika Níkomacha z Gerasy. Vliv tohoto Boethiova textu na způsob pěstování aritmetické teorie je zřejmý nejen v raném, vrcholném či pozdním středověku, ale přetrval až do novověku.[5]

Studie vznikla v rámci projektu SGS10/FF/2014 *Středověké prameny – úskalí jejich interpretace a zpřístupnění II*, řešeném na Filozofické fakultě Ostravské univerzity v Ostravě.

[1] A. M. T. S. BOETHIUS, *De institutione arithmetica* I, 1. *CCSL* 94A. Turnhout: Brepols 1999, s. 11.

[2] Viz *ibid*. I, 1, s. 12. Srov. také ISIDORUS Hispalensis, *Etymologiarum sive Originum libri XX* III, 1, 1. Oxford: Clarendon Press 1911 (česky ISIDOR ze Sevilly, *Etymologiae I–III / Etymologie I–III*. Praha: OIKOYMENH 2000, s. 283); F. M. A. CASSIODORUS, *Institutiones divinarum et humanarum litterarum* II, 4, 1. Oxford: Clarendon Press 1937, s. 132.

[3] Viz např. AUGUSTINUS Hipponensis, *De doctrina christiana* II, 16, 25; resp. II, 38, 56. *CCSL* 32. Turnhout: Brepols 1962 (česky AUGUSTINUS Aurelius, *Křesťanská vzdělanost – De doctrina christiana*. Praha: Vyšehrad 2004, s. 99–101, resp. 122–123). Nebo také AUGUSTINUS Hipponensis, *De libero arbitrio* II, 8, 20–16, 42. W. M. Green (ed.). *CCSL* 29. Turnhout: Brepols 1970 (česky AUGUSTINUS Aurelius, „O svobodném rozhodování". In: HOŠEK, R., *Aurelius Augustinus. Říman – člověk – světec*. Praha: Vyšehrad 2000, s. 168–185) atd.

[4] AUGUSTINUS, *De libero arbitrio* II, 11, 32 (česky s. 178).

[5] Viz např. Karel BERÁNEK, *Bakaláři a mistři promovaní na filozofické fakultě Univerzity Karlovy v Praze v letech 1586–1620*. Praha: Univerzita Karlova 1988, s. 6.

Tato studie se zaměří na čtyři dochované texty z konce 10. století, v nichž se přímo či nepřímo reaguje na podněty vzešlé z Boethiova aritmetického *Úvodu*, především pak na výklady, komentáře či glosy k první kapitole druhé knihy Boethiova díla, v níž se řeší otázka poměrů, číselných tříčlenných (dnes bychom řekli geometrických) posloupností a transformací těchto posloupností mezi sebou navzájem, resp. převody na dřívější stejnost. Cílem studie je ukázat, že zdánlivě odtažitá a již hodně vzdálená debata nad určitým problémem boethiovské matematiky si stále podržela svou aktualitu, vznesené diskusní příspěvky a následné závěry lze poměřovat nejen historickým, ale také ahistorickým prizmatem, jelikož dodnes platí, že práce s posloupnostmi ctí principy vznesené v době raného středověku. Záměrem tohoto textu je nejen ukázat způsob, jak bylo pracováno s aritmetickým pojednáním Posledního Římana v posledních letech před rokem 1000, ale také pokusit se o nalezení a stručné nastínění možných hlavních důvodů zájmu o číselné poměry a posloupnosti u raně středověkých myslitelů, což může napomoci k odhalení odlišného historického kontextu, v němž se řešila matematická pravidla, jež dodnes nepozbyla svou platnost.

II.

Patrně nejznámějším autorem uceleného textu z konce 10. století, který se věnuje výkladu Boethiova *Úvodu do aritmetiky II, 1* je Gerbert z Aurillacu (před 950–1003), opat v Bobbiu (981/982–983/998), nepotvrzený arcibiskup v Remeši (990/991–995/997), ravennský arcibiskup (998–999), pod jménem Silvestr II. římský papež (999–1003).[6] Počátky Gerbertova učeneckého

[6] Dobové informace o jeho životě a díle podává zejména Richer z Remeše (RICHERUS Remensis, *Historiarum libri quatour* III, 43–65. *MGH SS*. T. 38. Hannover: Impensis Bibliopolii Hahniani 2000, s. 191–205). Podstatné údaje nabízí také jeho korespondence (GERBERT von Reims, *Die Briefsammlung Gerberts von Reims. MGH BDK.* T. 2. Weimar: Hermann Bohlaus Nachfolger 1966), na podrobnější informace o životě, díle, příp. legendě viz např. Nancy Marie BROWN, *The Abacus and the Cross. The Story of the Pope Who Brought the Light of Science to the Dark Ages.* New York: Basic Books 2010; Anna Marie FLUSCHE, *The Life and Legend of Gerbert of Aurillac: The Organbuilder Who Become Pope Sylvester II.* Lewiston: Edwin Mellen Press 2005; Pierre RICHÉ, *Gerbert d'Aurillac: Le pape de l'an mil.* Paris: Fayard 1987; Michele TOSI, M. (ed.), *Gerberto – scienza, storia e mito. Atti del Gerberti Symposium*. Bobbio: A.S.B. 1985; Massimo OLDONI, „Gerberto e la sua Storia." *Studi Medievali*, roč. 18, 1977, č. 2, s. 629–704; Massimo OLDONI, „‚A fantasia dicitur fantasma' (Gerberto e la sua storia, II)." *Studi Medievali*, roč. 21,1980, č. 2, s. 493–622; Massimo OLDONI, „‚A fantasia dicitur fantasma' (Gerberto e la sua storia, II) II." *Studi Medievali*, roč. 24, 1983, č. 1, s. 167–245; Oscar G. DARLINGTON, „Gerbert, the Teacher." *The American Historical Review*, roč. 52, 1947, č. 3, s. 456–476 a mnoho dalších.

věhlasu lze klást do 70. let 10. století, kdy začal kooperovat s otonskou císařskou dynastií a stal se učitelem v Remeši. Své současníky udivoval především znalostí *quadrivia* a nezvyklým důrazem na praktickou využitelnost jednotlivých poznatků (usnadnění geometrických a aritmetických výpočtů na početní tabulce zvané abakus, používání observačních astronomických přístrojů, konstrukce časoměrných zařízení, inovace tehdejších varhan i hry na ně atp.). Dobově neobyčejný přístup k svobodným uměním si osvojil zejména během přibližně tříletého pobytu na Pyrenejském poloostrově (967–970). Mezi žáky či spolupracovníky v průběhu jeho učitelského remešského působení patřil také mnich Konstantin z Fleury, kterému na konci 70. let (příp. na počátku 80. let) 10. století adresoval několik dopisů a pojednání o práci na abaku,[7] o konstrukci observační hemisféry,[8] o výkladu některých pasáží Boethiova *Úvodu k hudbě*[9] a zřejmě také vysvětlující komentář k Boethiově *Úvodu do aritmetiky II, 1*, tzv. *Scholium ad Boethii Arithmeticam Institutionem l. II, c. 1*,[10] který byl sepsán nejpravděpodobněji mezi léty 978–980 a pokouší se objasnit Boethiem ne zcela jednoznačně představený postup, jímž se nestejné poměry mezi čísly převádí na stejnost.

Jen o něco málo mladší je patrně matematický spis Abbona z Fleury (kol. 945–1004), mnicha, převora a posléze opata (988–1004) v klášteře svatého Benedikta ve Fleury,[11] který po studiích (mj. v Paříži či v Remeši)

[7] GERBERTUS Auriliacensis, *Regulae de numerorum abaci rationibus*. In: *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica (972–1003)* I, 1, A, 1. Bubnov, N. (ed.). Berlin: R. Friedländer & Sohn 1899 (repr. Hildesheim: Georg Olms 1963), s. 1–22; resp. GERBERTUS Auriliacensis, *Fragmentum de norma rationis abaci*. Ed. N. Bubnov. In: *ibid.* I, 1, A, 2, s. 23–24.

[8] GERBERTUS Auriliacensis, *De sphaera*. In: *ibid.* I, 1, A, 3, s. 24–28.

[9] GERBERTUS Auriliacensis, *Scholium ad Boethii Musicae Institutionis l. II, c. 10; l. IV, c. 2*. In: *ibid.* I, 1, A, 4, s. 28–30; resp. GERBERTUS Auriliacensis, *Scholium ad Boethii Musicae Institutionis l. II, c. 21*. In: *ibid.* I, 1, A, 5, s. 30–31.

[10] GERBERTUS Auriliacensis, *Scholium ad Boethii Arithmeticam Institutionem l. II, c. 1*. In: *ibid.* I, 1, A, 6, s. 31–35.

[11] Autorem jeho životopisného spisu z raného středověku je Aimon z Fleury (AIMONIUS Floriacensis, *Vita sancti Abbonis*. In: *PL* 139, c. 387–414), dochována je i Abbonova korespondence a životopisné údaje lze vyčíst i z některých jeho děl (viz ABBO Floriacensis, *Epistolae*. In: *PL* 139, c. 419–462; resp. ABBO Floriacensis, *Apologeticus ad Hugonem et Rodbertum*. In: *PL* 139, c. 461–472). Pro další informace viz např. Elizabeth DACHOWSKI, *First Among Abbots: The Career of Abbo of Fleury*. Washington: The Catholic University of America Press 2008; Pierre RICHÉ, *Abbon de Fleury: un moine savant et combatif (vers 950-1004)*. Turnout: Brepols 2004; Eva-Maria ENGELEN, *Zeit, Zahl und Bild. Studien zur Verbindung von Philosophie und Wissenschaft bei Abbo von Fleury*. Berlin – New York: Walter de Gruyter 1993; Marco MOSTERT, *The Political Theology of Abbo of Fleury: A Study of the*

působil v 80. letech 10. století jako učitel klášterní školy v anglickém Ramsey. V první polovině 80. let[12] okomentoval spis *Calculus* od Viktorina z Akvitánie, který nazval *De numero, mensura et pondere*.[13] Tento komentář k Viktorinově předmluvě a následným tabulkám není tedy bezprostředně vázán na Boethiův *Úvod do aritmetiky*, jeho účel a cíl směřuje jinam, ovšem i Abbo se na autoritativní Boethiův text několikrát odkazuje[14] a především se podrobněji vyjadřuje k problematice, o níž pojednává zmíněná úvodní kapitola druhé knihy *Úvodu do aritmetiky*.

Přestože Gerbert píše své *Scholium* jako výklad Boethia, kdežto Abbonův text je komentářem k Viktorinovi, oba zmiňují, že při převodu poměrů vyjadřujících nestejnost čísel je zapotřebí postupovat řádně a nikoli zmateně (*confuse*).[15] Zdá se, že oba reagují na konkrétní neadekvátní způsob vytváření přechodů mezi číselnými posloupnostmi, který se patrně v tehdejší době praktikoval. Ani jeden autor však není v tomto bodě adresný, proto je nutno spíše spekulovat. Z přibližně téže doby se dochoval jiný stručný popis toho, jak převádět jednotlivé tříčlenné číselné posloupnosti na dřívější stejnost, tj. na základní tříčlennou posloupnost, která je dána třemi stejnými číselnými hodnotami (např. 1, 1, 1 nebo 3, 3, 3 atp.). Tento text je nazýván *De superparticularibus*[16] a je autorsky připisován Notkerovi z Lutychu (kol. 940–1008), který patrně působil a studoval v benediktinském klášteře svatého Havla a poté, co pobýval na otonském císařském dvoře, se s přispěním Otty I. stal biskupem (od 972) a knížetem-biskupem (od 980) v Lutychu, kde se významně zasloužil o všestranný rozvoj města, včetně velké a úspěšné

Ideas about Society and Law of the Tenth-century Monastic Reform Movement. Hilversum: Verloren 1987 a řada dalších.

12 Srov. Alison M. PEDEN, „Introduction." In: ABBO of Fleury and Ramsey, *Commentary on the Calculus of Victorius of Aquitaine*. Oxford: Oxford University Press 2003, s. xiv.

13 Viz ABBON de Fleury, *Questions grammaticales* 50. Paris: Société d'Édition 1982, s. 275. Srov. také ABBO of Fleury and Ramsey, *Commentary* II, 1, s. 65.

14 Viz např. ABBO, *Commentary* III, 24, s. 87, kde je Boethius jmenovitě uveden.

15 GERBERTUS, *Scholium*, s. 33; ABBO, *Commentary* III, 22, s. 86.

16 *Notgeri scholium*. In: *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica (972–1003)* App. II, 1. Berlin: R. Friedländer & Sohn 1899 (repr. Hildesheim: Georg Olms 1963), s. 297–299. Srov. také Irene CAIAZZO, „Un commento altomedievale al De arithmetica di Boezio." Archivum Latinitatis Medii Aevi, roč. 58, 2000, s. 118, resp. 125; příp. také Gillian R. EVANS, „*The Saltus Gerberti:* The Problem of the ‚Leap'." *Janus*, roč. 67, 1980, č. 4, s. 264–266.

snahy o rozkvět tamní školy.[17] Ve druhé polovině 90. let 10. století patřil (podobně jako Gerbert) do blízkého okruhu císaře Otty III. a pro české prostředí je určitě zajímavé, že se bezpochyby znal (ostatně znovu stejně jako např. Gerbert) se svatým Vojtěchem a je někdy považován (buď osobně, nebo někdo z jeho spolupracovníků) za možného autora nejstarší svatovojtěšské legendy *Vita prior* či *Vita antiquior* (*Locus est* ...),[18] dříve připisované např. i Gerbertovi z Aurillacu či Radimovi-Gaudentiovi a nejčastěji aventinskému opatu Janu Canapariovi.[19] Není pochyb, že se Abbo, Notker i Gerbert znali, navíc s Notkerovým jménem spojovaný výklad přechodů mezi posloupnostmi vykazuje zřejmé rysy Abbonem i Gerbertem zmiňovaného zmatení, takže mezi všemi třemi texty může být skutečná souvislost, což naznačují i dochované poznámky z 12. století.[20] Zdá se tedy, že zde byly Gerbertem a Abbonem prováděné postupy na jedné straně a na straně druhé odlišný způsob, jehož reprezentantem patrně byl kupř. Notker.

Notkerovo dílko se dochovalo v rukopise z kláštera Tegernsee (dnes Mnichov, Bayerische Staatsbibliothek, CLM 18764, f. 78v–79r) jako dovětek k Boethiově *Úvodu do aritmetiky*. Součástí tohoto rukopisu je i úvod (*accessus)* a komentář k Boethiově spisu, který pod názvem *De arithmetica Boetii* editovala I. Caiazzo.[21] Rovněž tyto texty vznikly nejpravděpodobněji

[17] Viz především na středověký životopis (*Vita Notgeri episcopi Leodiensis.* In: Godefroid KURTH, *Notger de Liège et la civilisation au 10e siècle*. Sv. 2. Paris: A. Picard 1905, s. 10–15). Z dobových zpráv pak zejména *Anselmi gesta episcoporum Tungrensium, Traiectensium et Leodiensium* II, 25–30. *MGH SS* 7. Hannover: Impensis bibliopoli Hahniani 1846, s. 203–206. Dále viz např. Jean-Pierre DELVILLE – Jean-Louis KUPPER – Marylène LAFFINEUR-CREPIN (eds.), *Notger et Liège. L'an mil au cœur de l'Europe*. Liège: Éditions du Perron 2008; Godefroid KURTH, *Notger de Liège et la civilisation au 10e siècle.* Sv. 1. Paris – Bruxelles – Liège: A. Picard 1905 ad.

[18] Průlomovou se stala zejména studie Johannese Frieda (Johannes FRIED, „Gnesen – Aachen – Rom: Otto III. und der Kult des heiligen Adalbert. Beobachtungen zum älteren Adalbertsleben." In: BORGOLTE, M. (ed.), *Polen und Deutschland vor 1000 Jahren. Die Berliner Tagung über den „Akt von Gnesen"*. Berlin: Akademie Verlag 2002, s. 235–279), která se však setkala i s kritikou.

[19] Edici, včetně typologie recenzí a analýzy iniciačních podnětů i možných autorství zpracování variant této legendy nabízí Jadwiga Karwasińska – viz „Sancti Adalberti Pragensis episcopi et martyris Vita prior." *Monumenta Poloniae Historica, Nova Series.* Tom. IV / 1. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1962.

[20] EVANS, *„The Saltus Gerberti,"* s. 267.

[21] Edici komentáře (na základě čtyř dochovaných rukopisů tohoto textu) viz *De arithmetica Boetii*. In: I. CAIAZZO, *Un commento altomedievale al De arithmetica di Boezio*, s. 126–149. Na text úvodu viz Gillian R. EVANS, „Introductions to Boethius's „Arithmetica" of the Tenth to the Fourteenth Century." *History of Science*, roč. 16, 1978, s. 23.

na sklonku 10. století,[22] pročež vytváří autentický doplněk k dříve zmíněným třem pojednáním.

III.

Předmětem zájmu raně středověkých autorů konce 10. století se stala především úvodní pasáž druhé knihy Boethiovy *Aritmetiky*, v níž její autor tvrdí, že veškerá nestejnost pochází z dřívější stejnosti, podobně jako vše hmotné je složeno ze čtyř prvků (*elementa*), slova jsou složena z písmen (*litterae*) či hudba má základ ve zvucích (*sonus*). Všechny tyto původní složky mají počátek v dřívější stejnosti.[23] A protože vše bylo stvořeno podle číselných poměrů[24] a samotný Bůh je prvotně jedním, stále stejným a nesloženým bytím,[25] je zřejmé, že každá proporce či poměr má svůj kořen v jednotě a stejnosti.[26]

Stejnost a nestejnost jsou v *Aritmetice* definovány jako dva typy relativních vlastností čísel, tj. takových vlastností čísel, při nichž se pojednává

[22] Viz CAIAZZO, *Un commento altomedievale al De arithmetica di Boezio*, s. 123–125.

[23] BOETHIUS, *Arith.* II, 1, s. 93–94: „Superioris libri disputatione digestum est, quemadmodum tota inaequalitatis substantia a principe sui generis aequalitate processerit. Sed quae rerum elementa sunt, ex hisdem principaliter omnia componuntur et in eadem rursus resolutione facta soluuntur; ut, quoniam articularis uocis elementa sunt litterae, ab eis est syllabarum progressa coniunctio et in easdem rursus terminatur extremas; eandem que uim obtinet sonus in musicis. Iam uero mundum corpora quattuor non ignoramus efficere; namque ut ait <lucretius>: ‚ex imbri, terra atque anima gignuntur et igni'. Sed in haec rursus eius quattuor elementa fit postrema solutio. Ita igitur, quoniam ex aequalitatis margine cunctas inaequalitatis species proficisci uidemus, omnis a nobis inaequalitas ad aequalitatem uelut ad quoddam elementum proprii generis resoluatur." Srov. NIKOMACHOS, *Arith.* II, 1, 1–2, s. 73–74.

[24] BOETHIUS, *Arith.* I, 2, s. 14; srov. NIKOMACHOS, *Arith.* I, 6, 1, s. 12.

[25] Viz např. A. M. T. S. BOETHIUS, *Quomodo trinitas unus Deus ac non tres dii (De trinitate)* 5. Cambridge, MA – London: Harvard University Press – W. Heinemann 1978, s. 28 (česky A. M. T. S. BOETHIUS, *První teologický traktát*. In: *Teologické traktáty.* Praha: Krystal 2004, s. 17); resp. A. M. T. S. BOETHIUS, *Quomodo substantiae in eo, quod sint, bonae sint (De hebdomadibus).* Cambridge, MA – London: Harvard University Press – W. Heinemann 1978, s. 40–48 (česky A. M. T. S. BOETHIUS, *Třetí teologický traktát*. In: *Teologické traktáty.* Praha: Krystal, 2004, s. 22–23).

[26] BOETHIUS, *Arith.* I, 32, s. 80: „Hoc autem erit perspicuum, si intellegamus, omnes inaequalitatis species ab aequalitatis creuisse primordiis, ut ipsa quodammodo aequalitas matris et radicis obtinens uim ipsa omnes inaequalitatis species ordines que profundat." Srov. NIKOMACHOS, *Arith.* I, 23, 6, s. 65. Z raně středověkých textů se k této problematice vyjadřuje velmi podobně např. Abbo z Fleury – viz ABBO, *Commentary* III, 20, s. 85–86.

o vztahu mezi číselnými hodnotami.[27] V případě stejnosti dochází k tomu, že porovnávané hodnoty nejsou menší ani větší, nýbrž jsou totožné, tj. mají tutéž velikost, jako je tomu v případě komparace desítky s desítkou, trojky s trojkou, lokte s loktem, stopy se stopou apod.[28] Nestejnost čísel je dána tím, že při srovnávání číselných hodnot je jedno číslo větší nebo menší než druhé o nějakou část druhého čísla[29] – tímto jsou také určeny dva základní typy nestejnosti. Větší i menší nestejnost se pak dále rozpadá v pět základních druhů nestejností,[30] tj. na násobky ***[I.1.]***[31] a dělitele ***[II.1.]***,[32] superpartikulární ***[I.2.]***, subsuperpartikulární ***[II.2.]***[33], superparcientní ***[I.3.]*** a subsuperparcientní poměry ***[II.3.]***,[34] superpartikulární násobky ***[I.4.]*** a subsuperpartikulární

[27] BOETHIUS, *Arith.* I, 21, s. 55; srov. NIKOMACHOS, *Arith.* I, 17, 1–2, s. 44.

[28] BOETHIUS, *Arith.* I, 21, s. 55: „Et aequale quidem est, quod ad aliquid comparatum neque minore summa infra est, neque maiore transgreditur, ut denarius denario uel ternarius ternario uel cubitum cubito uel pes pedi et his similia." Srov. NIKOMACHOS, *Arith.* I, 17, 3, s. 44; viz také např. ISIDORUS, *Etymologiae* III, 6, 3 (česky s. 291); CASSIODORUS, *Institutiones* II, 4, 5, s. 136; resp. *De arithmetica Boetii*, s. 131.

[29] V antické a středověké matematice platí, že pod částí čísla se rozumí buď dělitel určitého čísla, nebo jakékoli číslo menší, než je dané číslo.

[30] BOETHIUS, *Arith.* I, 22, s. 56: „Maioris uero inaequalitatis V sunt partes. Est enim una, quae uocatur multiplex, alia superparticularis, tertia superpartiens, quarta multiplex superparticularis, quinta multiplex superpartiens. His igitur quinque maioris partibus oppositae sunt aliae quinque partes minoris, quemadmodum ipsum maius minori semper opponitur, quae minoris species ita singillatim speciebus quinque maioris his, quae supra dictae sunt, opponuntur, ut eisdem nominibus nuncupentur, sola tantum ‚sub' praepositione distantes. Dicitur enim submultiplex, subsuperparticularis, subsuperpartiens, submultiplex superparticularis et submultiplex superpartiens." Srov. NIKOMACHOS, *Arith.* I, 17, 7–8, s. 45–46. Viz také např. ISIDORUS, *Etymologiae* III, 6, 1–2, 4–5 (česky s. 291), CASSIODORUS, *Institutiones* II, 4, 5, s. 135.

[31] Čísla v hranatých závorkách odkazují na označení v tab. 1.

[32] Podrobněji o násobcích ***[I.1.]*** a dělitelích ***[II.1.]*** viz BOETHIUS, *Arith.* I, 23, s. 56–59; srov. NIKOMACHOS, *Arith.* I, 18, 1–7, s. 46–48. Viz také ISIDORUS, *Etymologiae* III, 6, 5–6 (česky s. 293); CASSIODORUS, *Institutiones* II, 4, 5, s. 136; MARTIANUS, *De nuptiis* VII, 760, s. 279; srov. rovněž ABBO, *Commentary* III, 73, s. 116–117.

[33] Podrobněji o superpartikulárních ***[I.2.]*** a subsuperpartikulárních poměrech ***[II.1.]*** viz BOETHIUS, *Arith.* I, 24, s. 60–63; srov. NIKOMACHOS, *Arith.* I, 19, 1–7, s. 49–50. Viz také ISIDORUS, *Etymologiae* III, 6, 7; resp. III, 6, 10 (česky s. 293); CASSIODORUS, *Institutiones* II, 4, 5, s. 136–137; MARTIANUS, *De nuptiis* VII, 761, s. 279; viz rovněž ABBO, *Commentary* III, 74, s. 117–118.

[34] Podrobněji o superparcientích ***[I.3.]*** a subsuperparcientích poměrech ***[II.3.]*** viz BOETHIUS, *Arith.* I, 28, s. 70–73; srov. NIKOMACHOS, *Arith.* I, 20–21, s. 55–59. Viz také ISIDORUS, *Etymologiae* III, 6, 8–9 (česky s. 293); CASSIODORUS, *Institutiones* II, 4, 5, s. 137; MARTIANUS, *De nuptiis* VII, 762, s. 280; srov. rovněž ABBO, *Commentary* III, 75, s. 118–119.

dělitele ***[II.4.]***,[35] superparcientní násobky ***[I.5.]*** a subsuperparcientní dělitele ***[II.5]***.[36] Podrobnější přehled nabízí, včetně základních vymezení a příkladů, tab. 1.

Vznik všech těchto nestejností z dřívější stejnosti lze uchopit pomocí tří jednoduchých pravidel. Při přeměně tříčlenné posloupnosti (tj. z $a_1 - a_2 - a_3$ na $\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 - \tilde{a}_3$) jednoho poměru v druhý (např. stejnosti, tj. poměr 1 : 1, na násobky, tj. poměr 2 : 1) podle Boethia (a samozřejmě i Níkomacha) platí:[37]

[P1] $\tilde{a}_1 = a_1$
[P2] $\tilde{a}_2 = a_1 + a_2$
[P3] $\tilde{a}_3 = a_1 + 2a_2 + a_3$

I.	***VĚTŠÍ ČÍSLO SE SROVNÁVÁ S MENŠÍM***		
I.1.	**násobek** (*multiplex*)	větší číslo obsahuje v sobě menší číslo více než jednou	poměr 2 : 1 (*dvojnásobky*); poměr 3 : 1 (*trojnásobky*); poměr 4 : 1 (*čtyřnásobky*) etc.
I.2.	**superpartikulární poměr**, tj. číslo s částí (*superparticularis*)	větší číslo zahrnuje celé menší číslo a ještě nějakou jeho část, kterou lze vyjádřit jako kmenný zlomek (tj. čitatelem je vždy jednička)	poměr 3 : 2 (*půldruhanásobky*, tj. seskvialtera, kvinta, číslo s polovinou); poměr 4 : 3 (*čtyřtřetinové násobky*, tj. seskvitercie, kvarta, číslo s třetinou); poměr 5 : 4 (*pětičtvrtinové násobky*, tj. seskvikvarta, velká tercie, číslo se čtvrtinou) etc.

[35] Podrobněji o superpartikulárních násobcích ***[I.4.]*** a subsuperpartikulárních dělitelích ***[II.4.]*** viz BOETHIUS, *Arith.* I, 29–30, s. 73–78; srov. NIKOMACHOS, *Arith.* I, 22, 1–7, s. 59–63. Viz také ISIDORUS, *Etymologiae* III, 6, 11–12 (česky s. 293); CASSIODORUS, *Institutiones* II, 4, 5, s. 137–138; MARTIANUS, *De nuptiis* VII, 763–764, s. 281–282; srov. rovněž ABBO, *Commentary* III, 77, s. 119–120.
[36] Podrobněji o superparcientích násobcích ***[I.5.]*** a subsuperparcientích dělitelích ***[II.5.]*** viz BOETHIUS, *Arith.* I, 31, s. 78–79; srov. NIKOMACHOS, *Arith.* I, 23, 1–3, s. 63–64. Viz také ISIDORUS, *Etymologiae* III, 6, 12–13 (česky s. 295); CASSIODORUS, *Institutiones* II, 4, 5, s. 138; srov. rovněž ABBO, *Commentary* III, 79, s. 120–121.
[37] BOETHIUS, *Arith.* I, 32, s. 81: „Praecepta autem tria haec sunt, ut primum numerum primo facias parem, secundum uero primo et secundo, tertium primo, secundis duobus et tertio."

I.3.	**superparcientní poměr**, tj. číslo s částmi (*superpartiens*)	větší číslo zahrnuje celé menší číslo a dále více než jednu jeho část, tzn. tuto část menšího čísla nelze vyjádřit jako zlomek, jehož čitatelem by byla jednička	poměr 5 : 3 (*pětitřetinové násobky*); poměr 7 : 4 (*sedmičtvrtinové násobky*); poměr 9 : 5 (*devítipětinové násobky*) etc.
I.4.	**superpartikulární násobek**, tj. násobný vztah čísla s částí (*multiplex superparticularis*)	větší číslo obsahuje v sobě celé menší číslo více než jednou a ještě nějakou jeho část, kterou lze vyjádřit jako kmenný zlomek	poměr 5 : 2 (*dvouapůlnásobky*); poměr 7 : 2 (*třiapůlnásobky*); poměr 7 : 3 (*násobky dvou a jedné třetiny*) etc.
I.5.	**superparcientní násobek**, tj. násobný vztah čísla s částmi (*multiplex superpartiens*)	větší číslo obsahuje v sobě celé menší číslo více než jednou a ještě více než jednu jeho část, tzn. tuto část menšího čísla nelze vyjádřit jako zlomek, jehož čitatelem by byla jednička	poměr 8 : 3 (*násobky dvou a dvou třetin*); poměr 11 : 4 (*násobky dvou a jedné čtvrtiny*); poměr 11 : 3 (*násobky tří a dvou třetin*) etc.
II.	***MENŠÍ ČÍSLO SE SROVNÁVÁ S VĚTŠÍM***		
II.1.	**dělitel** (*submultiplex*)	menší číslo je ve větším obsaženo více než jednou	poměr 1 : 2 (*polovina*); poměr 1 : 3 (*třetina*); poměr 1 : 4 (*čtvrtina*) etc.
II.2.	**subsuperpartikulární poměr**; tj. číslo bez části (*subsuperparticularis*)	menší číslo je ve větším obsaženo celé spolu se svou nějakou částí, kterou lze vyjádřit jako kmenný zlomek (tj. čitatelem je vždy jednička)	poměr 2 : 3 (*dvě třetiny*, subseskvialtera, číslo bez třetiny); poměr 3 : 4 (*tři čtvrtiny*, subseskvitercie, číslo bez čtvrtiny); poměr 4 : 5 (*čtyři pětiny*, subseskvikvarta, číslo bez pětiny) etc.
II.3.	**subsuperparcientní poměr**, tj. číslo bez částí (*subsuperpartiens*)	menší číslo je ve větším obsaženo celé spolu s více než jednou svou částí, tzn. tuto část menšího čísla nelze vyjádřit jako zlomek, jehož čitatelem by byla jednička	poměr 3 : 5 (*tři pětiny*); poměr 4 : 7 (*čtyři sedminy*); poměr 5 : 9 (*pět devítin*) etc.

II.4.	**subsuperpartikulární dělitel**, tj. dělitel čísla bez části (*submultiplex subsuperparticularis*)	menší číslo je ve větším obsaženo celé více než jednou spolu se svou nějakou částí, kterou lze vyjádřit jako zlomek, jehož čitatelem je jednička	poměr 2 : 5 (*dvě pětiny*); poměr 2 : 7 (*dvě sedminy*); poměr 3 : 7 (*tři sedminy*) etc.
II.5.	**subsuperparcientní dělitel**, tj. dělitel čísla s částmi (*submultiplex subsuperpartines*)	menší číslo je ve větším obsaženo celé více než jednou spolu se svou nějakou částí, kterou nelze vyjádřit jako kmenný zlomek	poměr 3 : 8 (*tři osminy*); poměr 4 : 9 (*čtyři devítiny*); poměr 3 : 11 (*tři jedenáctiny*) etc.

Tabulka 1: *Deset druhů nestejnosti*

Začíná-li se tedy od stejnosti ***[1.]***[38] (např. 1 – 1 – 1 nebo 3 – 3 – 3) vznikají z ní nejprve násobky ***[2.]***. Mohou to být dvojnásobky ***[2a]*** (např. 1 – 2 – 4 nebo 3 – 6 – 12), trojnásobky ***[2b]*** (např. 1 – 3 – 9 nebo 3 – 9 – 27), čtyřnásobky ***[2c]*** (např. 1 – 4 – 16 nebo 3 – 12 – 48) atd.

Násobky ***[2.]*** jsou základem pro superpartikulární poměry ***[3.]***, které vznikají z obrácené násobné posloupnosti (např. 4 – 2 – 1 nebo 48 – 12 – 3 etc.). Z dvojnásobků ***[2a]*** vznikají poměry 3 : 2 ***[3a]***, tedy půldruhanásobky či seskvialtery (např. 4 – 6 – 9 nebo 12 – 18 – 27); z trojnásobků ***[2b]*** poměry 4 : 3 ***[3b]***, tj. čtyřtřetinové násobky či seskvitercie (např. 9 – 12 – 16 nebo 27 – 36 – 48), ze čtyřnásobků ***[2c]*** poměry 5 : 4 ***[3c]***, tzn. pětičtvrtinové násobky resp. seskvikvarty (např. 16 – 20 – 25 či 48 – 60 – 75) apod.

Po opětovném obrácení posloupnosti uspořádané v superpartikulárním poměru ***[3.]*** (tzn. např. 9 – 6 – 4 nebo 75 – 60 – 48 atp.) vzniká superparcientní poměr ***[4.]***. A i tentokrát poměr 3 : 2 čili půldruhanásobek ***[3a]*** je kořenem pro poměr 5 : 3 ***[4a]***, tj. pětitřetinový násobek (např. 9 – 15 – 25 nebo 27 – 45 – 75); poměr 4 : 3 ***[3b]***, tedy čtyřtřetinový násobek produkuje poměr 7 : 4 ***[4b]*** čili sedmičtvrtinový násobek (např. 16 – 28 – 49 nebo 48 – 84 – 147); poměr 5 : 4 ***[3c]*** zakládá poměr 9 : 5 ***[4c]*** (např. 25 – 45 – 81 nebo 75 – 135 – 243) atd.

Standardně (nikoli reverzně) uspořádané superpartikulární poměry ***[3.]*** (tj. 4 – 6 – 9 nebo 48 – 60 – 75 apod.) umožňují získat superpartikulární násobky ***[5.]***: z poměru 3 : 2 ***[3a]*** vzniká poměr 5 : 2 ***[5a]*** (např. 4 – 10 – 25

[38] Údaje v hranatých závorkách odkazují na označení v tab. 2.

nebo 12 – 30 – 75); z poměru 4 : 3 ***[3b]*** poměr 7 : 3 ***[5b]*** (např. 9 – 21 – 49 nebo 27 – 63 – 147); a z poměru 5 : 4 ***[3c]*** poměr 9 : 4 ***[5c]*** (např. 16 – 36 – 81 nebo 48 – 108 – 243).

Podobně pak ze vzestupně uspořádaných superparcientních poměrů ***[4.]*** (tzn. 9 – 15 – 25 či 75 – 135 – 243) jsou vytvořeny superparcientní násobky ***[6.]***: poměr 5 : 3 ***[4a]*** dává poměr 8 : 3 ***[6a]*** (např. 9 – 24 – 64 nebo 27 – 72 – 192); poměr 7 : 4 ***[4b]*** dává poměr 11 : 4 ***[6b]*** (např. 16 – 44 – 121 nebo 48 – 132 – 363); a poměr 9 : 5 ***[4c]*** zase 14 : 5 ***[6c]*** (např. 25 – 70 – 196 nebo 75 – 210 – 588).[39] Přehledněji viz tab. 2.

1.	stejnost / *aequalitas*		$a_{n+1} = a_n$	3 – 3 – 3
2.	násobek / *multiplex*	a) dvojnásobek / *duplex*	$a_{n+1} = 2a_n$	3 – 6 – 12
		b) trojnásobek / *triplex*	$a_{n+1} = 3a_n$	3 – 9 – 27
		c) čtyřnásobek / *quadruplex*	$a_{n+1} = 4a_n$	3 – 12 – 48
		atd.		
3.	supertikulární poměr / *superparticularis* (vznikají z násobků po reverzi posloupnosti)	a) dvojnásobek → půldruhanásobek / *sesquialtera*	$a_{n+1} = (3/2)a_n$	12 – 18 – 27
		b) trojnásobek →čtyřtřetinový násobek / *sesquitertia*	$a_{n+1} = (4/3)a_n$	27 – 36 – 48
		c) čtyřnásobek →pětičtvrtinový násobek / *sesquiquarta*	$a_{n+1} = (5/4)a_n$	48 – 60 – 75
		atd.		

[39] BOETHIUS, *Arith.* I, 32, s. 81: „Sint enim nobis tres aequales termini, id est tres unitates, uel ter bini, uel ter terni, uel ter quaterni, uel quantos ultra libet ponere. Quod enim in unis tribus terminis euenit, idem contingit in ceteris. Ex his igitur secundum praecepti nostri ordinem uideas primum nasci multiplices et in his duplices prius, dehinc triplos, inde quadruplos et ad eundem ordinem consequentes. Rursus multiplices si conuertantur, ex his superparticulares orientur, et ex duplicibus quidem sesqualteri, ex triplis sesquitertii, ex quadruplis sesquiquarti, et ceteri in hunc modum. Ex superparticularibus uero conuersis superpartientes nasci necesse est, ita ut ex sesqualtero nascatur superbipartiens, supertripartientem sesquitertius gignat et ex sesquiquarto superquadripartiens procreetur. Rectis autem positis neque conuersis prioribus superparticularibus multiplices superparticulares oriuntur; rectis uero superpartientibus multiplices superpartientes efficiuntur." Příklady přechodů mezi posloupnosti viz BOETHIUS, *ibid*, s. 82–87; srov. tab. 3.

4.	superparcientní poměr / *superpartiens* (vznikají ze superpartikulárních poměrů po reverzi posloupnosti)	a) půldruhanásobek → pětitřetinový násobek / *superbipartiens*	$a_{n+1} = (5/3)a_n$	27 – 45 – 75
		b) čtyřtřetinový násobek → sedmičtvrtinový násobek / *supertripartiens*	$a_{n+1} = (7/4)a_n$	48 – 84 – 147
		c) pětičtvrtinový násobek → devítipětinový násobek / *superquadripartiens*	$a_{n+1} = (9/5)a_n$	75 – 135 – 243
		atd.		
5.	superpartikulární násobek / *multiplex superparticularis* (vznikají z posloupností superpartikulárních poměrů)	a) půldruhanásobek → dvouapůlnásobek / *dupla sesquialtera*	$a_{n+1} = (5/2)a_n$	12 – 30 – 75
		b) čtyřtřetinový násobek → násobek dvou a jedné třetiny / *dupla sesquitertia*	$a_{n+1} = (7/3)a_n$	27 – 63 – 147
		c) pětičtvrtinových násobek → násobek dvou a jedné čtvrtiny / *dupla sesquiquarta*	$a_{n+1} = (9/4)a_n$	48 – 108 – 243
		atd.		
6.	superparcientní násobek / *multiplex superpartiens* (vznikají z posloupností superparcientních poměrů)	a) pětitřetinový násobek → násobek dvou a dvou třetin / *dupla superbiparciens*	$a_{n+1} = (8/3)a_n$	27 – 72 – 192
		b) sedmičtvrtiný násobek → násobek dvou a tří čtvrtin / *dupla supertriparciens*	$a_{n+1} = (11/4)a_n$	48 – 132 – 363
		c) devítipětinový násobek → násobek dvou a čtyř pětin / *dupla superquadriparciens*	$a_{n+1} = (14/5)a_n$	75 – 210 – 588
		atd.		

Tabulka 2: *Vznik nestejnosti ze stejnosti podle Boethia (Arith. I, 32).*

Aplikací tří stručných regulí ***[P1–3]*** lze rekonstruovat vznik všech typů nestejností z původní stejnosti, což je dominantní rámec, v němž o této problematice hovoří zejména Abbo z Fleury. Podobně jako Boethius, který tvrdil, že každý filosof jakožto filosof se musí zabývat zejména disciplínami *quadrivia*, neboť bez znalostí těchto čtyř umění nemůže nalézt pravdu,[40] a aritmetika mezi nimi zastává první místo,[41] se i Abbo domnívá, že filosofie, tj. láska k moudrosti, je zároveň láskou k Bohu.[42] K Bohu nás bezpečně vede znalost aritmetiky, neboť Boží moudrost, jejímž symbolem je chrám Moudrosti vystavěný na sedmi sloupech, což odpovídá sedmi svobodným uměním,[43] vytvořila vše stvořené podle míry, čísla a váhy.[44] Na počátku tak nemohlo být nic jiného, než jednotka, která je principem a počátkem všech čísel (ačkoli sama číslem není – všechna čísla jsou z jednotky, skrze jednotku a v jednotce),[45] zároveň nemá žádné části a tudíž je totožná s bytím a nutností,[46] tedy je božským základem veškerenstva, které vytváří vše ostatní podle matematických poměrů (tzv. diagram *lambda* v návaznosti na Platónův dialog *Timaios* a Chalcidiovy a Macrobiovy komentáře k němu).[47]

[40] *Ibid*. I, 1, s. 11: „Quibus quattuor partibus si careat inquisitor, uerum inuenire non possit, ac sine hac quidem speculatione ueritatis nulli recte sapiendum est. Est enim sapientia earum rerum, quae uere sunt, cognitio et integra comprehensio. Quod haec qui spernit, id est has semitas sapientiae, ei denuntio non recte philosophandum, siquidem philosophia est amor sapientiae, quam in his spernendis ante contempserit."

[41] *Ibid*. I, 1, s. 12.

[42] ABBO, *Commentary* II, 1, s. 65: „Amor sapientiae, qui a Graecis philosophia dicitur, ..."; resp. *ibid*. II, 7, s. 68: „... amor sapientiae est amor Dei, ..."

[43] *Ibid*. II, 1, s. 65. Srov. *Prov* 9, 1: „Sapientia aedificavit sibi domum, excidit columnas septem; ..." [*Př* 9, 1: *„Moudrost si vystavěla dům, vytesala sedm sloupů."*] Latinská znění biblických textů přebírám z *Biblia Sacra. Nova Vulgata. Bibliorum Sacrorum Editio* [online]. Dostupné z: <http: / / www.vatican.va / latin / latin_bible.html> [cit. 11. 1. 2013], český překlad pak podle ekumenického vydání *Bible. Písmo svaté Starého a Nového Zákona*. Praha: Česká biblická společnost 1985.

[44] Podrobněji ABBO, *Commentary* II, 10–15, s. 69–71. Srov. *Sap*. 11, 20: „Sed omnia in mensura et numero et pondere disposuisti." [*Mdr*. 11, 20: „Ale ty jsi všechno uspořádal s mírou, počtem a váhou."]

[45] ABBO, *Commentary* III, 5, s. 75: „Quae unitas, cum sit principium numeri, non tamen est numerus sed numerorum omnium mensura, quia ipsi constant ex ipsa et per ipsam et in ipsa." Srov. také Rom 11, 36: „Quoniam ex ipso et per ipsum et in ipsum omnia." [*Ř* 11, 35: „Vždyť z něho a skrze něho a pro něho je všecko!"].

[46] ABBO, *Commentary* III, 3, s. 74: „Ipsa unitas sectionem non recipit. Omne quod est, unum est, et quicquid unum est, illud sit necesse est."

[47] Např. ABBO, *Commentary* III, 1–2, s. 72–74. Srov. PLATO, *Timaeus*. Oxford: Oxford University Press 1903. *Platonis Opera*. T. 4, 34b–36d (česky PLATÓN, *Timaios*. Praha: OIKOYMENH 2003. *Platónovy spisy*. Sv. 4, s. 395–396); a dále také MACROBIUS Ambrosius Theodosius, *Commentarii in Somnium Scipionis* I, 6, 45–47. Leipzig: Teubner 1970, s. 26, resp.

Velmi podobně na důležitost znalosti převodů mezi posloupnostmi nahlíží i autor textu *De arithmetica Boetii*: Vše je buď Stvořitel, nebo stvořené. Vše stvořené pochází od stvořitele tak, jako nestejnosti vycházejí z původní stejnosti.[48] Stejnost (stejně jako Nejvyšší dobro) je totožná s Bohem, vzdalováním se od tohoto původního Jednoho vzniká nestejnost a zlo.[49] Znalost návratu ke stejnosti je návratem k Bohu, neboť ten je prvotním Dobrem a stejností.

IV.

Ovšem debata nad Boethiovou *Aritmetikou* se před rokem 1000 nevedla kvůli poslední kapitole první knihy, nýbrž především nad kapitolou následující, tj. nad úvodním oddílem knihy druhé. Dělení Boethiova *Úvodu do aritmetiky* je více méně umělé, takže řešená problematika na sebe *de facto* kontinuálně navazuje. Po objasnění zrodu mnohosti v původní jednotě zde Boethius řeší otázku návratu nestejnosti k dřívější stejnosti. Jsou-li tedy dány tři číselné hodnoty, jejichž uspořádání odpovídá určitému poměru, pak bez ohledu na druh nestejnosti (násobky, superpartikulární nebo superparcientní poměr, superpartikulární či superparcientní násobek), lze tyto převést na stejnost.[50]

I v tomto případě jsou uvedena tři pravidla, jejichž dodržování je nezbytné při korektním hledání návratu k dřívější stejnosti:[51]

CHALCIDIUS, *Commentarius in Platonis Timaeum* I, 32. *Corpus Platonicum medii aevi. Plato latinus* T. 4. London – Leiden: Warburg Institute – Brill 1975, s. 81–82.

[48] *De arithmetica Boetii*, s. 140–141: „Omnis enim natura aut creatrix est aut creata. Creatrix: deus; creata: quæcumque ab eo facta est. In eo similitudo est, quia exordium habent omnes creaturæ a deo; non tamen ab eius natura, sed ab eius opificio, sicut istæ omnes inæqualitates manant ex æqualitate ..."

[49] *Ibid*., s. 141–142.

[50] BOETHIUS, *Arith.* II, 1, s. 94: „Hoc autem trina rursus imperatione colligitur, ea que resoluendi ars datis quibuslibet tribus terminis inaequalibus quidem sed proportionaliter constitutis, id est ut eandem medius ad primum uim proportionis obtineat, quam qui est extremus ad medium, in qualibet inaequalitatis ratione – uel in multiplicibus, uel in superparticularibus, uel in superpartientibus, uel in his qui ex his procreantur multiplicibus superparticularibus, uel multiplicibus superpartientibus – eadem atque una ratione indubitata constabit." Srov. NIKOMACHOS, *Arith.* II, 2, 1, s. 74.

[51] BOETHIUS, *Arith.* II, 1, s. 94: „Propositis enim tribus, ut dictum est, terminis aequis proportionibus ordinatis ultimum semper medio detrahamus et ipsum quidem ultimum primum terminum collocemus, quod de medio relinquitur, secundum. De tertia uero propositorum terminorum summa auferemus unum primum et duos secundos – eos qui de medietate relicti sunt – et id quod ex tertia summa relinquitur, tertium terminum constituemus." Srov. NIKOMACHOS, *Arith.* II, 2, 1–2, s. 74–75.

[R1] $\tilde{a}_1 = a_1$
[R2] $\tilde{a}_2 = a_2 - a_1$
[R3] $\tilde{a}_3 = a_3 - (2\tilde{a}_2 + a_1)$

Bezprostředně po uvedení těchto regulí, která jsou inverzní k pravidlům ***[P1–3]***,[52] následuje pasáž, která patrně byla rozhodujícím impulzem pro vlastní debatu raně středověkých myslitelů: Boethius totiž říká, že aplikace těchto pravidel nám dokáže v určitém poměru uspořádanou posloupnost tří číselných hodnot převést na dřívější poměr – tj. např. u násobků dochází k tomu, že se čtyřnásobky převádí na trojnásobky, trojnásobky na dvojnásobky a tyto zase na stejnost, u superpartikulárních poměrů je poměr 5 : 4 (pětičtvrtinový násobek, seskvikvarta) změněn na původnější poměr 4 : 3 (čtyřtřetinový násobek, seskvitercie), poměr 4 : 3 následně na poměr 3 : 2 (půldruhanásobek, seskvialtera), z něhož už jsou odvozeny tři stejné číselné hodnoty.[53] K tomuto dodal Boethius už jen jediný příklad, v němž čtyřnásobky postupně promění na stejnost (schematicky viz tab 3).[54]

1.	8 – 32 – 128	čtyřnásobky (poměr 4 : 1)	aplikace pravidel ***[R1–3]***	↓
2.	8 – 24 – 72	trojnásobky (poměr 3 : 1)	aplikace pravidel ***[R1–3]***	↓
3.	8 – 16 – 32	dvojnásobky (poměr 2 : 1)	aplikace pravidel ***[R1–3]***	↓
4.	8 – 8 – 8	stejnost (poměr 1 : 1)		

Tabulka 3: *Boethiův příklad převodu násobků na stejnost podle pravidel [R1–3]*

K této ukázce Boethius podotýká, že každý, kdo se bude řídit představenými pravidly, snadno dokáže nalézt v nestejnosti soulad (*convenientia*), neboť

[52] Tzn. máme-li nějakou posloupnost, kterou pomocí pravidel ***[P1–3]*** transformujeme na novou posloupnost, pak se aplikací pravidel ***[R1–3]*** na získaný výsledek vrátíme k původní posloupnosti. Zároveň platí, že je-li určitá posloupnost daná jistým poměrem či kvocientem (q), pak pomocí pravidel ***[P1–3]*** získáme posloupnost v poměru $q + 1$, kdežto aplikací pravidel ***[R1–3]*** vznikne posloupnost v poměru $q - 1$.
[53] BOETHIUS, *Arith.* II, 1, s. 94: „Videbis igitur hoc facto in minorem modum summas reuerti et ad principaliorem habitudinem comparationes proportiones que reduci, ut si sit quadrupla proportio, primo ad triplam, inde ad duplam, inde ad aequalitatem usque remeare; et si sit superparticularis sesquiquartus, primo ad sesquitertium, inde ad sesqualterum, postremo ad tres aequales terminos redire."
[54] *Ibid.*, s. 95–96.

stejnost je matkou všech nestejností, protože veškerá nestejnost se z ní zrodila a k ní se zase navrací.[55]

Přes v zásadě podrobný rozbor celé otázky zůstala nerozřešena jedna poměrně důležitá věc: Jak přesně postupovat při převodu jednotlivých typů nestejností? Už Boethius označil tuto část aritmetiky za nejhlubší nauku (*profundissima*),[56] k čemuž autor komentáře *De arithmetica Boetii* dodává, že se jedná o učení nejtajemnější a nejdůmyslnější (*obscurissima et subtilissima*),[57] přesto (anebo právě proto) zde zůstaly nejasnosti, jejichž řešení nebylo považováno za snadné. Omezíme-li se zde (ve shodě s hlavním rozdílem, který se objevil mezi autory poslední čtvrtiny 10. století) na vzájemný vztah superpartikulárních poměrů, násobků a stejnosti, pak se nabízí hned dvojí možnost čtení Boethiova textu:

1. v souladu s *Úvodem* do *aritmetiky* II, 1 lze jednotlivé druhy superpartikulárních poměrů (5 : 4, 4 : 3, 3 : 2) a násobků (4 : 1, 3 : 1, 2 : 1) převést na stejnost (1 : 1) v rámci jednoho typu nestejnosti, tzn. např. z trojnásobků na dvojnásobky a z nich na totožnost, resp. ze čtyřtřetinového násobku na půldruhanásobky a z nich na stejné číselné hodnoty;
2. platí-li, že proces povstávání nestejností ze stejnosti a proces návratu nestejností ke stejnosti je reverzibilní, pak není možné (s výjimkou násobků) při nacházení zárodečné stejnosti vždy postupovat výhradně v rámci dané nestejnosti, protože např. půldruhásobky nemají svůj původ ve stejnosti, nýbrž ve dvojnásobcích, čtyřtřetinové násobky v trojnásobcích atd., jak to odpovídá *Úvodu do aritmetiky* I, 32.

Jinými slovy – jsou-li následovány postupy z *Úvodu do aritmetiky* II, 1, nelze dostát tezím z *Úvodu do aritmetiky* I, 32, a naopak.

V.

A zdá se, že právě toto možné variantní čtení dvou kapitol Boethiova spisu bylo klíčovou příčinou celé debaty o převodech poměrů posloupností na sklonku 10. století. Notker z Lutychu se přiklonil k první uvedené mož-

[55] *Ibid.*, s. 96: „Hinc igitur si quis ad alias inaequalitatis species animum tendat, eandem conuenientiam intitubanter inueniet. Quare pronuntiandum est nec ulla trepidatione dubitandum, quod quemadmodum per se constantis quantitatis unitas principium et elementum est, ita et ad aliquid relatae quantitatis aequalitas mater est. Demonstrauimus enim, quod hinc et eius procreatio prima foret et in eam rursus postrema solutio."
[56] *Ibid.* I, 32, s. 80.
[57] *De arithmetica Boetii*, s. 140.

nosti. V souladu s Boethiem se pokouší ukázat, že superpartikulární poměry je možné převádět mezi sebou a teprve v předposledním kroku stačí, když je poměr 3 : 2 převeden na dvojnásobek, odkud už je možno přejít přímo ke stejnosti. Notker si však byl dobře vědom, že redukce superpartikulárních poměrů mezi sebou, tedy bez bezprostředního převodu na násobky, se dostává do rozporu s Boethiem tolik vyzdvihovanými třemi pravidly pro převody mezi jednotlivými poměry (tj. pravidla ***[R1–3]***). Zřejmě z tohoto důvodu jeho stručný text začíná upozorněním, že Boethius nezamýšlel své regule jako jediný možný způsob převodů tří nestejných hodnot uspořádaných v určitém poměru na dřívější stejnost, nýbrž to byl pouze pomocný nástroj, který není zapotřebí bezvýhradně aplikovat ve všech případech. Určitě to pak podle Notkera není vhodné při hledání cesty od tří číselných hodnot poměrné posloupnosti 5 : 4 ke třem stejným členům.[58]

Notker navrhuje odlišná pravidla, jak postupovat při jednotlivých převodech. V případě transformace poměru 5 : 4 v poměr 4 : 3 doporučuje tento postup:[59]

[N1] $\tilde{a}_1 = a_1$
[N2] $\tilde{a}_2 = a_2 - (1/2)a_1$
[N3] $\tilde{a}_3 = a_3 - a_1$

Pro přechod mezi poměrem 4 : 3 a 3 : 2 pak radí užívat tyto regule:[60]

[O1] $\tilde{a}_1 = a_1$
[O2] $\tilde{a}_2 = a_2 - (1/2)a_2$; resp. $\tilde{a}_2 = (1/2)a_2$
[O3] $\tilde{a}_3 = a_3 - a_2$

Hledání dřívější stejnosti tří hodnot v superpartikulárně uspořádané posloupnosti podle Notkera vypadá takto: Z pětičtvrtinového násobku (5 : 4) přechází ke čtyřtřetinovému násobku (4 : 3), od něj k půldruhanásobku

[58] NOTKER, *De superparticularibus*, s. 297: „Nota quia dixit adjuvabit. Hinc scilicet roboratus, alio non prorsus dissimili praecepto poteris in superparticulari quoque specie ex sesquiquarto in sesquitertium summam redigere et ex sesquitertio in sesqualterum et ex sesqualtero in duplum et ex duplo in aequas unitates." Srov. BOETHIUS, *Arith.* II, 1: „Hoc autem nos exempli gratia in multiplici tantum proportione docebimus, sollertem uero in aliis quoque inaequalitatis speciebus id experientem eadem ratio praeceptorum iuuabit."
[59] NOTKER, *De superparticularibus*, s. 298: „Ponamus in sesquiquarta proportione XVI et XX et XXV et tollamus primum a tertio et ipsius primi dimidiam partem a secundo."
[60] *Ibid.*: „Hi rursus alio modo a sesquitertia in sesqualteram mutantur proportionem. Tollatur ergo medium ab ultimo, id est XII a XVI, et remanebunt IIII. Tollatur ab ipso medio sua medietas id est VI et remanebunt alii VI."

(3 : 2), který převádí na dvojnásobek (2 : 1) a následně získává stejnost (1 : 1),[61] jak to představuje tab. 4.

1.	16 – 20 – 25	48 – 60 – 75	A) pětičtvrtinový násobek (5 : 4)	aplikace pravidel ***[N1–3]***	↓
2.	16 – 12 – 9	48 – 36 – 27		reverze posloupností	↓
3.	9 – 12 – 16	27 – 36 – 48	B) čtyřtřetinový násobek (4 : 3)	aplikace pravidel ***[O1–3]***	↓
4.	9 – 6 – 4	27 – 18 – 12		reverze posloupností	↓
5.	4 – 6 – 9	12 – 18 – 27	C) půldruhanásobek (3 : 2)	aplikace pravidel ***[R1–3]***	↓
6.	4 – 2 – 1	12 – 6 – 3		reverze posloupností	↓
7.	1 – 2 – 4	3 – 6 – 12	D) dvojnásobek (2 : 1)	aplikace pravidel ***[R1–3]***	↓
8.	1 – 1 – 1	3 – 3 – 3	E) stejnost (1 : 1)		

Tabulka 4: *Notkerův postup převodu pětičtvrtinového násobku na stejnost*

Notkerův proces přechodu mezi jednotlivými superpartikulárními poměry sice nectí ve stěžejních krocích Boethiova pravidla ***[R1–3]*** pro postupnou redukci a návrat, ovšem je to postup správný a navíc souhlasí s Boethiovou explicitní tezí, že se superpartikulární poměry mají převádět bez zprostředkujících poměrů.

Tímto ovšem dovětek z tegernseeského rukopisu k Boethiově *Úvodu do aritmetiky* nekončí. Autor totiž následuje způsob, jakým jsou jednotlivé nestejnosti vytvořeny, a pokračuje dalšími třemi druhy nestejností a ukazuje, jak lze tyto převést na superpartikulární poměry, z nichž už je zřejmé, jak dospět ke stejnosti.

Superparcientní poměry jsou převedeny na superpartikulární podle těchto pravidel:

[S1 = R1] $\tilde{a}_1 = a_1$
[S2 = R2] $\tilde{a}_2 = a_2 - a_1$
[S3] $\tilde{a}_3 = a_3 - \{[x + (x - y)] / y\}a_1$; resp. $\tilde{a}_3 = a_3 - [(2x - y) / y]a_1$;
kde x je čitatelem převáděného poměru (prvním číslem) a y je jmenovatelem (druhým číslem) téhož poměru

[61] *Ibid.*

Notker ve svém stručném textu neuvádí pravidlo ***[S3]*** v právě uvedené podobě, nýbrž pro každý jednotlivý případ superparcientního poměru (x/y) zmiňuje konkrétní hodnotu prvního čísla (a_1) převáděné posloupnosti, kterou je nutno odečíst od třetího čísla (a_3), abychom dostali třetí člen nové posloupnosti ($\tilde{a}_3$). Tedy např. v případě devítipětinového násobku (poměr 9 : 5) platí, že je nezbytné odečíst od třetího členu číselné posloupnosti dvakrát první člen a ještě tři pětiny tohoto prvního členu, tzn. $(13/5)a_1$, což koresponduje s pravidlem ***[S3]***: pro poměr 9 : 5 platí, že $x = 9$, $y = 5$, tedy $\{[x + (x - y)] / y\}a_1$ je $\{[9 + (9 - 5)] / 5\}a_1 = (13/5)a_1$.[62] V případě sedmičtvrtinového poměru (7 : 4) se podle pravidla ***[S3]*** od čísla a_3 odečítá dvakrát číslo a_1 a ještě polovina čísla a_1, tzn. $(5/2)a_1$, neboť $\{[x + (x - y)] / y\ a_1$ je $\{[7 + (7 - 4)] / 4\}a_1 = (10/4)a = (5/2)a_1$.[63] Stejně je tomu u poměru pětitřetinového (5 : 3), kdy nás pravidlo ***[S3]*** pobízí k tomu, aby od členu a_3 byl odečten dvakrát člen a_1 a ještě třetina členu a_1, tzn. $(7/3)a_1$, protože z $\{[x + (x - y)] / y\}a_1$ plyne $\{[5 + (5 - 3)] / 3\}a_1 = (7/3)a_1$.[64]

A poté již Notker přechází ke čtvrtému a pátému druhu nestejnosti – tj. k superpartikulárním a superparcientním násobkům. Zde uvádí vždy jen jeden příklad, který navíc v případě superparcientních násobků není dokončen, přesto je poměrně velmi snadné zformulovat základní pravidla, podle nichž se má v těchto případech postupovat:

[T1 = R1] $\tilde{a}_1 = a_1$
[T2 = R2] $\tilde{a}_2 = a_2 - a_1$
[T3] $\tilde{a}_3 = a_3 - [(x/y)a_1 + a_2]$; resp. $\tilde{a}_3 = a_3 - [(z - y)/y]a_1 + a_2$;

kde x/y je superpartikulární nebo superparcientní poměr, na který se určitá posloupnost převádí, resp. z je čitatelem superparcientního či superpartikulárního násobku, tj. převáděného poměru

[62] *Ibid.*, s. 298: „Statuamus ergo superquadripartiente XXV, XLV, LXXXI. Tollatur deinde semel primus a secundo, hoc est XXV a XLV, et remanent XX. Item tollatur bis primus a tertio, id est XXV et ejus tres quintae partes, ab LXXXI, et remanent XVI. Ergo primus XXV et XX, qui de secundo remanserunt, et XVI, qui de tertio remanserunt, vincunt se in sesquiquarta proportione."

[63] *Ibid.*: „Item ponantur supertripartientes XVI, XXVIII, XLVIII. Tollamus primum semel a secundo et bis eundem primum ac semissem ejus a tertio. Remanent a secundo XII, a tertio novem. Quibus ille primus antepositus sesquitertiam servat proportionem sic: XVI, XII, VIIII." V textu je omylem uvedena hodnota 48 místo správné 49 u třetího členu posloupnosti dané sedmičtvrtinovým poměrem.

[64] *Ibid.*, s. 298–299: „Item sint superbipartientes VIIII, XV, XXV. Tollamus primum a secundo semel et a tertio ipsum primum bis atque ejus tertiam partem. Et erunt remanentes sesqualteri VIIII, VI, IIII."

Pokud převádíme superpartikulární násobek, získáme superpartikulární poměr, od něhož je již možno dospět k dvojnásobku a následně ke stejnosti, jak bylo předvedeno dříve. Převádíme-li superparcientní násobek, pak nejprve vzniká superparcientní poměr, který je zprvu nutno přetvořit v superpartikulární poměr a dále se postupuje stejně. Užití pravidel ***[T1–3]*** je relativně velmi snadné. Bude-li nutno redukovat násobek dvou a jedné třetiny (tj. poměr 7 : 3, *dupla sesquitertia*, pak $x/y = 4/3$, neboť má vzniknout superpartikulární poměr 4 : 3, tzn. $(z - y)/y = (7 - 3)/3 = 4/3$), pak podle pravidla ***[T3]*** platí, že třetí člen získané posloupnosti ($\tilde{a}_3$) je dána rozdílem členu a_3 a součtu $(4/3)a_1$ s a_2.[65] Podobně v případě superparcietního násobku je zřejmé, že kupř. násobek dvou a tří čtvrtin (tj. poměr 11 : 4, *dupla supertriparciens*, je $x/y = 7/4$; tzn. $(z - y)/y = (11 - 4)/4 = 7/4$) je nutno třetí člen číselné posloupnosti převádět na superparcientní poměr (7 : 4) aplikací pravidla ***[T3]***, tj. $\tilde{a}_3 = a_3 - [(7/4)a_1 + a_2]$.[66]

Tímto Notker probral převody všech nestejností na jejich předchůdce, které v posledku vedou až ke stejnosti. Jelikož jediný dochovaný rukopis s jeho textem končí uprostřed věty, nezbývá než návrat jednotlivých nestejností k původní rovnosti zrekonstruovat bez přímého odkazu na Notkerovo *scholium*. Zdá se však, že by návraty superpartikulárního a superparcientního násobku ke stejnosti mohly vypadat např. tak, jak je uvedeno v tab. 5.

1.	A) superpartikulární násobek	násobek dvou a jedné čtvrtiny (9 : 4)	16 – 36 – 81	48 – 108 – 243	aplikace pravidel ***[T1–3]***	↓
2.	B) superpartikulární poměr	pětičtvrtinový násobek (5 : 4)	16 – 20 – 25	48 – 60 – 75	aplikace pravidel ***[N1–3]***	↓
3.			16 – 12 – 9	48 – 36 – 27	reverze posloupností	↓

[65] *Ibid.*, s. 299: „Sint duplices sesquitertii in quarta specie VIIII, XV, XLVIII. Tollatur primus a secundo et remanent XII. A tertio vero primus et secundus et tertia pars primi, remanent XVI. Ergo VIIII et XII et XVI sesquitertiam servant proportionem et quarta in secundam redacta est species." Posloupnost násobku dvou a jedné třetiny je v textu uvedena hned se dvěma chybnými hodnotami: druhý člen má mít hodnotu 21 místo uvedené 15 a třetí hodnota je správně 49, nikoli 48.

[66] *Ibid.*: „Item sit in quinta specie duplex supertripartiens XVI, XLIIII, CXXI. Tollatur primus, qui est XVI, a secundo, remanent XXVIII. Tollatur a tertio, id est a CXXI ..."

4.		čtyřtřetinový násobek (4:3)	9 – 12 – 16	27 – 36 – 48	aplikace pravidel ***[O1–3]***	↓
5.			9 – 6 – 4	27 – 18 – 12	reverze posloupností	↓
6.		půldruhanásobek (3:2)	4 – 6 – 9	12 – 18 – 27	aplikace pravidel ***[R1–3]***	↓
7.			4 – 2 – 1	12 – 6 – 3	reverze posloupností	↓
8.	C) násobek	dvojnásobek (2:1)	1 – 2 – 4	3 – 6 – 12	aplikace pravidel ***[R1–3]***	↓
9.	D) stejnost	rovnost (1:1)	1 – 1 – 1	3 – 3 – 3		

Tabulka 5: *Převod superpartikulárních násobků na stejnost podle Notkera*

Byť to na první pohled nemusí být zřejmé, uvedená Notkerova pravidla ***[S3]*** a ***[T3]*** poskytují stejné redukce posloupností jako Boethiovo pravidlo ***[R3]***, což je dáno tím, že od členu a_3 se vždy odečítá totéž, tzn. všechna pravidla jsou vzájemně záměnná, jelikož platí ***[R3]*** = ***[S3]*** = ***[T3]***, protože $2\tilde{a}_2 + a_1 = (x / y)a_1 + a_2 = [(2x - y) / y]a_1$. Odečítanou část pravidla ***[R3]*** lze totiž podle pravidla ***[R2]*** modifikovat na $2a_2 - a_1$, odkud je s využitím charakteristiky geometrické posloupnosti, tj. $a_2 = a_1 + (x / y)a_1$ snadné přejít k $2[a_1 + (x/y)a_1] - a_1 = 2a_1 + 2[(x/y)a_1] - a_1 = 2[(x/y)a_1] + a_1 = (x/y)a_1 + (x/y)a_1 + a_1$. Opětovným využitím charakteru geometrické posloupnosti je získáno pravidlo ***[T3]***: $(x / y)a_1 + a_2$. Toto pravidlo lze v souladu s variantou ***[T3]*** upravit na $[(z - y) / y]a_1 + [(z - y) / y]a_1 + a_1 = \{[(2z - 2y) + y] / y\}a_1$, z čehož plyne pravidlo ***[S3]***: $[(2x - y) / y]a_1$.

Notker takto vytvořil modifikovaná pravidla, která poskytují převody pro všechny typy nestejností, ovšem nenásledují znění Boethiových regulí a také v případě superpartikulárních násobků nepostupují podle obráceného pořadí odvození těchto nestejností, což byly zřejmě hlavní příčiny, proč se Abbo z Fleury i Gerbert z Aurillacu proti tomuto návodu ohradili.

VI.

Zatímco se Notker rozhodl pro první variantu čtení Boethiova *Úvodu do aritmetiky*, tak Gerbert i Abbo raději volili druhou možnost, tedy drželi se regulí ***[R1–R3]*** a odlišně interpretovali Boethiovo vyjádření, že jednotlivé superpartikulární poměry by měly být převáděny mezi sebou navzájem.

Gerbert, jehož pojednání bylo již ve středověku nazvýváno „*Saltus Gerberti*", sepsal velmi precizní a detailní návod pro přechod od superpartikulárních pětičtvrtinových poměrů (5 : 4) ke čtyřnásobkům (4 : 1),[67] od čtyřnásobků ke trojnásobkům (3 : 1),[68] které jsou zároveň prostředkem pro regulérní přechod k superpartikulárním čtyřtřetinovým poměrům (4 : 3) – s přímými odkazy na Boethia je tento způsob převodu pětičtvrtinového poměru na poměr čtyřtřetinový představen jako řádný.[69] Od čtyřtřetinových poměrů je možno se vrátit k trojnásobkům, které poskytují v dalším kroku dvojnásobky (2 : 1).[70] V souladu se vznikem nestejností platí, že z dvojnásobků povstávají půldruhanásobky (3 : 2), což uzavírá cestu od pětičtvrtinových poměrů k půldruhanásobkům podle Boethiových regulí a vyhýbá se možnému zmatení.[71] Využití Boethiových redukčních pravidel pak

[67] GERBERTUS, *Scholium* 1, s. 32–33: „Pone superparticulares sesquiquartos, utputa XVI, XX, XXV. Si ergo vis scire, quomodo isti sesquiquarti primo resolvantur in sequitertios, deinde in sesqualteros, postremo ad tres aequales terminos, sic ordina: XVI, XX, XXV. Aufer ex medio minorem et ipsum constitue primum, id est aufer XVI de XX et ipsos XVI pone primos, et remanent de XX—IIII: ipsos pone in secundo loco. De tertio vero termino, id est de XXV, aufer unum primum, id est XVI et duos secundos, id est duos quaternarios, qui sunt VIII, et remanet I. Ipsum unum constitue terminum tertium, et erunt: XVI, IIII, I. Vides, quomodo sesquiquarti redacti sunt in quadruplos, unde venerunt."

[68] *Ibid*., s. 33–34: „Sed ista resolutio non confuse neque inordinate debet fieri, id est non subito debent resolvi in sesquitertios, sed ordinatim, id est ipsos quadruplos - XVI, IIII, I converte et sic dispone: I, IIII, XVI. Aufer igitur minorem de medio, id est I de IIII, et ipsum I pone primum et ipsos III, qui relicti sunt de IIII, pone secundum. De tertio vero termino, id est de XVI, aufer unum primum et duos secundos, id est I et duos ternarios, et quod relinquitur de XVI, id est VIIII, pone tertium terminum et sic ordina: I, III, VIIII. Vides igitur, ut quadrupli redacti sint in triplos, eisdem ipsis quadruplis conversis, a quibus duxerant ipsi originem."

[69] *Ibid*., s. 34: „His quidem triplis, id est I, III, VIIII, conversis et sic positis: VIIII, III, I, si, memor praeceptorum Boetii, feceris primum aequum primo, id est VIIII, — secundum aequum primo et secundo, id est duodecim, — tertium primo duobusque secundis et tertio, id est XVI, facta est resolutio superparticularis sesquiquarti primo in sesquitertium, ut Boetius docet, non confuse, sed ordinate, sicut a principio numeri fuerant procreati, subtiliter adhibitis praeceptis."

[70] *Ibid*. 2, s. 34: „Si vis ergo scire, quemadmodum ipsi sesquiquarti in secundo loco revertantur ad sesqualteros, ipsos triplos conversos, id est VIIII, III, I, et hos transmuta et sic ordina: I, III, VIIII, et aufer minorem de medio, id est I de tribus, et ipsum pone primum terminum et, quod relinquitur de tribus, pone secundum terminum. De tertio vero, id est VIIII, aufer primum, id est I, et duos secundos, id est duos binarios, et quod relinquitur de VIIII, id est IIII, pone tertium terminum et sunt hi numeri dispositi: I, II, IIII. Vides igitur, quemadmodum tripli revertuntur in duplos unde procreabantur."

[71] *Ibid*., s. 34–35: „His siquidem duplis conversis et sic dispositis: IIII, II, I, si feceris, ut praedictum est, primum aequum primo, id est IIII, et secundum primo et secundo, id est VI, — tertium primo duobusque secundis et tertio, id est VIIII, et sunt IIII, VI, VIIII. Facta est

z dvojnásobků snadno poskytne stejnost (1 : 1) a Gerbert již počtvrté ve svém krátkém textu připomíná, že pouze toto je patřičná (tj. v souladu s Boethiem a především ve shodě se samotnou povahou čísel, číselných vztahů a jejich vznikem) metoda převodu superpartikulárních poměrů na nižší poměry téže nestejnosti, příp. na samotnou stejnost.[72] Sled Gerbertových kroků nabízí tab. 6.

1.	pětičtvrtinový násobek	poměr 5:4	16 – 20 – 25	48 – 60 – 75	aplikace pravidel ***[R1–3]***	↓
2.	čtvrtina	poměr 1:4	16 – 4 – 1	48 – 12 – 3	reverze posloupností	↓
3.	čtyřnásobek	poměr 4:1	1 – 4 – 16	3 – 12 – 48	aplikace pravidel ***[R1–3]***	↓
4.	trojnásobek	poměr 3:1	1 – 3 – 9	3 – 9 – 27	reverze posloupností	↓
5.	třetina	poměr 1:3	9 – 3 – 1	27 – 9 – 3	aplikace pravidel ***[P1–3]***	↓
6.	čtyřtřetinový násobek	poměr 4:3	9 – 12 – 16	27 – 36 – 48	aplikace pravidel ***[R1–3]***	↓
7.	třetina	poměr 1:3	9 – 3 – 1	27 – 9 – 3	reverze posloupností	↓
8.	trojnásobek	poměr 3:1	1 – 3 – 9	3 – 9 – 27	aplikace pravidel ***[R1–3]***	↓
9.	dvojnásobek	poměr 2:1	1 – 2 – 4	3 – 6 – 12	reverze posloupností	↓
10.	polovina	poměr 1:2	4 – 2 – 1	12 – 6 – 3	aplikace pravidel ***[P1–3]***	↓
11.	půldruhanásobek	poměr 3:2	4 – 6 – 9	12 – 18 – 27	aplikace pravidel ***[R1–3]***	↓

resolutio sesquiquarti in sesqualterum, non in primo loco, sed in secundo, ut Boetius docet, nec confuse, sed ordinate.“

[72] *Ibid.* 3, s. 34: „Si adhuc vis scire, quomodo ad tres aequales terminos ad ultimum revertantur sesquiquarti, ipsos duplos conversos, scilicet: IIII, II, I, transvolve et sic ordina: I, II, IIII. Aufer igitur minorem de medio, id est I de duobus, et ipsum I pone primum terminum et, quod relinquitur, pone secundum, id est I. De tertio termino, id est de IIII, aufer unum, id est I, et duos secundos, id est duas unitates, et relinquitur tibi una unitas, et sit I, I, I. Vides igitur, quemadmodum tota quantitas sesquiquarti redacta est ad tres aequales terminos, id est unitates: I, I, I, non confuse, sed ordinatim, sicut fuerat a principio procreata. Haec est igitur vera natura numerorum.“

12.	polovina	poměr 1:2	4 – 2 – 1	12 – 6 – 3	reverze posloupností	↓
13.	dvojnásobek	poměr 2:1	1 – 2 – 4	3 – 6 – 12	aplikace pravidel ***[R1–3]***	↓
14.	stejnost	poměr 1:1	1 – 1 – 1	3 – 3 – 3		

Tabulka 8: *Tzv. „Saltus Gerberti", tj. přechody mezi superpartikulárními poměry a násobky*

Z Gerbertova dopisu se zdá být poměrně zřejmé, že skutečně reaguje na Notkerův (či podobný) způsob čtení Boethia. Několikeré odmítnutí bezprostředních převodů superpartikulárních poměrů i opakované doporučování, aby byla vždy ctěna Boethiova pravidla ***[R1–3]***, příp. ***[P1–3]***, protože pouze jejich užíváním lze následovat proces, jak byly číselné posloupnosti vytvořeny, se zdá být zcela transparentně zacíleno na odlišný postup, který byl představen v Notkerově textu. Gerbert si nemyslí, že by Boethius svým tvrzením o převodu pětičtvrtinového poměru na čtyřtřetinový atd. měl na mysli bezprostřední přechod od jednoho superpartikulárního poměru k druhému, nýbrž předpokládal mezistupně v podobě násobných nestejností.

Vlastně totožně jako Gerbert řeší inkriminovanou potíž z Boethiova *Úvodu do aritmetiky* i Abbo z Fleury. Přímo cituje problematický Boethiův výrok o vzájemných převodech superpartikulárních poměrů a ihned ho vykládá: Boethius tím měl na mysli, že mezi poměry 4:3 a 5:4 nikdy nemůže být jiný superpartikulární poměr, ovšem nelze to chápat tak, že by se tyto poměry převáděly navzájem bez jakéhokoli prostředníka, neboť superpartikulární poměry vznikají z násobků, tudíž musí být vždy převáděny na násobky.[73] Proto také je zapotřebí ctít Boethiova pravidla ***[R1–3]***[74] a ve shodě s obráceným pořadím vzniku nestejných číselných posloupností přicházet k původní stejnosti – tzn. od superparcientních násobků k superparcientním poměrům, od těchto k poměrům superpartikulárním a přes násobky

[73] ABBO, *Commentary* III, 24, s. 87: „‚Si' inquit ‚sit superparticularis sesquiquartus, primo ad sesquitertium, inde ad sesqualterum, postremo ad tres aequales terminos redire', quia videlicet hac via nullus superparticularium unquam incurrit inter sesquiquartum ac sesquitertium. Superparticularis quippe, sicut per se non constituitur, ita nec per se dissipatur aut solvitur, quod pro certo tantum accidit multiplicibus." Srov. *ibid.* III, 27, s. 89 a BOETHIUS, *Arith.* II, 1, s. 94.
[74] ABBO, *Commentary* III, 23, s. 86.

ke stejnosti.[75] Následně Abbo uvádí dvě tabulky, které ukazují způsob, jak vznikly jednotlivé nestejnosti a jak se lze navrátit k dřívější stejnosti[76] – viz tab. 7.

1.	rovnost		1 : 1	2 – 2 – 2	
2.	násobky	dvojnásobek	2 : 1	2 – 4 – 8	
3.		trojnásobek	3 : 1	2 – 6 – 18	
3a.		čtyřnásobek	4 : 1		2 – 8 – 32
4.	superpartikulární poměry	čtyřtřetinový násobek	4 : 3	18 – 24 – 32	
		pětičtvrtinový násobek	5 : 4		32 – 40 – 50
5.	superparcientní poměry	sedmičtvrtinový násobek	7 : 4	32 – 56 – 98	
		devítipětinový násobek	9 : 5		50 – 90 – 162
6.	superpartikulární násobky	násobek dvou a jedné třetiny	7 : 3	18 – 42 – 98	
		násobek dvou a jedné čtvrtiny	9 : 4		32 – 72 – 162
7.	superparcientní násobky	násobek dvou a tří čtvrtin	11 : 4	32 – 88 – 242	
		násobek dvou a čtyř pětin	14 : 5		50 – 140 – 392

Tabulka 7: *Zrod nestejností (v obráceném sledu pak návrat ke stejnosti) podle Abbona z Fleury*

Gerbert i Abbo řeší důsledky plynoucí z *Úvodu do aritmetiky* II, 1 stejně a preferují sledovat vznik nestejností (podle *Úvodu do aritmetiky* I, 32), který je nutno při návratu k dřívější stejnosti otočit a postupovat při tom podle

[75] *Ibid.*, s. 87: „Nam eius descriptionis, quae est XVIII, XLVIII, CXXVIII, si minorem, id est XVIII, medio detrahas, id est XLVIII, relinquuntur XXX. Qui relictus, id est XXX, duplicatus facit LX. Igitur XVIII et LX subtrahuntur de CXXVIII, quae est tertia summa et remanent L. Quos exadversum constitue et videbis ad superpartientem unde nati sunt redisse ita: XVIII, XXX, L. Hos etiam eosdem praelibata ratione diminue et resituentur superparticularitati suae, quae prius in multiplicem, post revertetur in suae originis aequalitatem."
[76] *Ibid.* III, 25–26, s. 88.

regulí ***[R1–3]***. Notkerův návod k realizaci přechodů je sice možný, ovšem vykazuje rysy zmatenosti, zejména však není v souladu s přirozeností čísel a se vznikem poměrných posloupností.

VII.

Jak se z přechozích odstavců zdá, tematika úvodní kapitoly druhé knihy Boethiova *Úvodu do aritmetiky* budila na sklonku 10. století nemalou pozornost. Automaticky se tak nabízí otázka po příčinách zájmu o tento (na první pohled možná velmi speciální a zdánlivě pouze matematický) problém. Ontologicko-kreacionistická rovina už představena byla a nepochybně tvořila určující rámec pro celou debatu: Jak by se někdo mohl chtít považovat za patřičného věřícího, když by se nesnažil dospět k Bohu? A je-li matematická pravda, číslo, číselné poměry atp. nástrojem, který Bůh užil při tvorbě veškerenstva, když umožnil vznik mnohosti pocházející z nedílné jednoty, a bude-li nakonec vše podle stejného řádu převedeno zpět k Bohu, pak je jasné, že nejen pythagorejci a novopythagorejci, nejen Platón a novoplatonikové, ale také křesťané mají takřka povinnost poznávat tato mysterijní tajemství stvoření a návratu ke stvořiteli. Ovšem metafyzicko-teologicko-antropologický kontext, který formoval zájem o detailní rozbory geometrických posloupností, není zdaleka jediný, do něhož lze problematiku číselných poměrů (a z nich plynoucích číselných řad) vsadit.

Asi nejjasnější aplikací číselných poměrů nabízí už samotné vymezení matematických umění, jak ho prezentovali Boethius a Níkomachos v úvodních pasážích svých *Úvodů do aritmetiky*. Oba hovoří o dvou typech kvantity (*magnitudo* a *multitudo*), přičemž o obou těchto typech lze dále uvažovat výhradně ve vztahu k sobě samému a ve vztahu k něčemu jinému. Takto se nabízí čtveré dělení matematických umění: aritmetika zkoumá množství o sobě (číslo a jeho vlastnosti), geometrie se věnuje velikosti o sobě (tvary a jejich vlastnosti), předmětem astronomie jsou velikosti ve vzájemných vztazích (tj. vesmírná tělesa, jejich pohyby atp.) a hudba se zaměřuje na relativní množství (tj. číselné poměry).[77] Otázky související s posloupnostmi, které jsou uspořádány podle číselných poměrů, již podle samotného vymezení subjektů jednotlivých *quadriviálních* disciplín nespadá pod aritmetiku, nýbrž pod hudbu. Právě teorie hudebního umění se poměrům, jejich vzájemným vztahům, souvislostem, převodům atp. věnuje velmi intenzivně, což jsou témata, která lze historicky stopovat až do doby samotného Pýthagora

[77] BOETHIUS, *Arith.* I, 1, s. 10–11; NIKOMACHOS, *Arith.* I, 3, 1, s. 5–6.

ze Samu (např. slavný příběh o nalezení poměrů v kovářské dílně, o němž nás informuje Boethius).[78]

Aplikace číselných poměrů na hudební teorii (např. souzvuky tónů, monochord atp.) byly a jsou zcela automatické, což samozřejmě platilo i pro raně středověké autory, kteří namnoze chápali tuto problematiku jako přirozený přechod mezi aritmetickým a hudebním uměním, jak to dokládají např. slova Abbona z Fleury.[79] Tematicky to vyjadřuje také autor textu *De arithmetica Boetii*, když v návaznosti na Boethia vysvětluje totožnost aritmetických a hudebních poměrů: *diatessaron – sesquitertia* (4 : 3); *diapente – sesqualtera* (3 : 2); *diapason – dupla* (2 : 1) a *epogdous – sesquioctavus* (9 : 8).[80] Podobně Gerbert z Aurillacu komentoval také Boethiův *Úvod do hudby*, jak bylo uvedeno výše, či se intenzivně zajímal o hru na varhany[81] nebo používal monochord.[82]

Muzika však není jediným svobodným uměním, kde se aktivně využívají aritmetické zásady geometrických posloupností. Názorně to dokládá úvodní pasáž z mnichovského rukopisu z kláštera Tegernsee CLM 18764, f. 1–1v,[83] v níž jsou číselné poměry použity k výkladu metrických stop, tradiční to gramatické problematiky. Veškeré stopy jsou rozděleny podle toho, v jakém poměru jsou uspořádány přízvučné a nepřízvučné úseky (tzv. dlouhé a krátké slabiky). Autor (v návaznosti na Isidorovy *Etymologie*[84]) rozlišuje:

- stejný poměr, tj. číselný poměr jedné stopy se skládá ze stejných částí, tj. je v rovnosti, tzn. poměr 1 : 1 jako např. u čísel 2 a 2 nebo 4 a 4;[85]

[78] BOETHIUS, *De institutione musica* I, 10–11. Leipzig: Teubner 1867, s. 196–198.
[79] ABBO, *Commentary* III, 83, s. 122–123.
[80] *De arithmetica Boetii*, s. 134. Srov. také BOETHIUS, *Arith.* II, 48, s. 200–201; BOETHIUS, *Musica* I, 16–19, s. 201–205; resp. ABBO, *Commentary* III, 2, s. 73–74; resp. III, 11, 79–80. Další souvislosti v komentáři z tegernseeského rukopisu viz např. *De arithmetica Boetii*, s. 144.
[81] GERBERTUS, *Epistola* 92, s. 121. Podrobněji o Gerbertových hudebních aktivitách viz např. Klaus Jürgen SACHS, „Gerbertus cognomento musicus. Zur musikgeschichtlichen Stellung des Gerbert von Reims (nachmaligen Papstes Silvester II)." *Archiv für Musikwissenschaft*, roč. 29, 1972, č. 4, s. 257–274.
[82] RICHERUS, *Historia* III, 49, s. 195: „Cuius genera in monocordo disponens, eorum consonantias sive simphonias in tonis ac semitoniis, ditonis quoque ac diesibus distinguens tonosque in sonis rationabiliter distribuens, in plenissimam notitiam redegit."
[83] I. Caiazzo tuto část do své edice nezařadila. Text (*Ad arithmetica Boethii*) nabízí EVANS, „Introductions to Boethius's ‚Arithmetica'" s. 23.
[84] Srov. ISIDORUS, *Etymologiae* I, 17, 21–27 (česky s. 91–93).
[85] *Ad arithmetica Boethii*, s. 23: „Quae est aequa divisio? Ubi duo numeri in uno quolibet pede ratione temporum aequabiliter concordant, ut duo ad duo et quattuor ad quattuor. Unde dicitur aequalia? Ab ipsa numerorum equalitate praedicta."

– dvojnásobek, tj. číselný poměr v rámci jedné stopy je takový, že menší číslo je dvakrát převyšováno větším, tedy větší číslo obsahuje v sobě dvakrát menší číslo, tzn. poměr 2 : 1 jako např. u čísel 1 a 2 nebo 2 a 4;[86]
– půldruhanásobek, tj. stopa je určena takovým poměrem, že větší číslo v sobě zahrnuje celé menší číslo a ještě jeho polovinu, neboť menší je ve větším obsažena jedenapůlkrát, tzn. poměr 3 : 2;[87]
– trojnásobek, tj. taková stopa, v níž větší přesahuje menší třikrát, tzn. poměr 3 : 1;[88]
– čtyřtřetinový násobek, tj. číselný poměr v jedné stopě klade do většího čísla celé menší číslo a ještě jednu třetinu tohoto menšího čísla, tzn. poměr 4 : 3.[89]

Vedle této klasifikace nechybí ani výčet jednotlivých stop – těch se stejnými částmi je 10 (pyrrhichius, spondej, daktyl, anapest, proceleumaticus, dispondej, dijamb, ditrojech, antispast a choriamb), s dvojnásobnými částmi je 6 (jamb, trochej, molossus, tribrachys a větší i menší iónik), trojnásobné části má pouze jedna metrická stopa (amfibrach), půldruhanásobné části má 7 stop (kretikus čili amfimacer, bakchej, antibakchej a první až čtvrtý pajón) a čtyřtřetinové části mají 4 stopy (první až čtvrtý epitrit).[90] Tato klasifikace je zjevně další velkou oblastí, která aktivně využívá číselných poměrů a jejich vztahů.

Ani tento výčet svobodných umění, v nichž se aktivně využívá číselných posloupností, není zdaleka úplný – zejména Abbo z Fleury se podrobně věnoval aplikaci aritmetických znalostí v dalších uměních a svůj komentář

[86] *Ibid.*: „Quae est dupla? Ubi vero dissimiles numeri in uno pede conveniunt et minor a maiore dupliciter vincitur, ut est unum ad duos, et duo ad quattuor. Unde dicitur dupla? Ab ipsa duplari praeponderatione maioris numeri in minorem."
[87] *Ibid.*: „Quae est sescupla? Ubi aliquis maior numerus minorem in se habet et insuper eius medietatem, ut sunt duo ad tria. Tria enim habent duo in se et insuper unum, quod est medietas duorum. Unde dicitur sescupla? Sescupla dicitur quasi sesqualtera, eo quod se ipsam totam in se habeat, et insuper alteris medietatem."
[88] *Ibid.*: „Quae est tripla? Ubi aliquis maior numerus minorem tripliciter vincit, ut est unus ad tria. Unde dicitur tripla? Ab ipsa trina victoria."
[89] *Ibid.*: „Quae est epitria? Ubi maior numerus minorem in se habet et insuper eius tercia partem, ut sunt tria ad quattuor; quattuor enim habent tria in se et insuper unum, quod est tercia pars trium. Unde dicitur epitria? Epitrita dicitur quia supertrina, eo quod super tria unum habeat, ut quattuor ad tria."
[90] *Ibid.*

k Viktorinovi na mnoha místech proložil mezioborovými spojnicemi.[91] Přesto by na závěr mohla být zmíněna odlišná oblast, k níž neodmyslitelně patří číselné poměry a schopnost vzájemně je převádět – intelektuální zábava, tj. hra. Zdá se být nejpravděpodobnější, že právě kolem roku 1000 (příp. těsně před zlomem prvního milénia ve druhé), tedy v téže době, kdy vznikly aritmetické texty, o nichž tato studie pojednává, se na křesťanském latinském Západě začíná hrát intelektuální matematická desková hra *rithmomachia*, tzn. souboj čísel. Nejstarší texty o ní jsou známy z první poloviny 11. století a jejími autory jsou Asilo z Würzburgu (tzv. *Regula de rithmachia, id est de numeri pugna*, která vznikla kolem roku 1030) a snad Heřman z Reichenau (tzv. *Ludus qui dicitur rithmimachia*, kolem 1040).[92]

Zůstane-li pominuto, že stanovení pravidel této hry bylo již ve středověku přisuzováno Gerbertu z Aurillacu (vedle např. Boethia a Pýthagora),[93] pravděpodobněji lze uvažovat o někom z jeho okolí či žáků,[94] nebo že v dobových rukopisech jsou rithmomachické tabulky, pomůcky či texty nezřídka připojeny k aritmetickým pojednáním,[95] je zřejmé, že samotná hra je ve svých nejstarších textech vždy uvedena jako aritmetická[96] a Notkerem, Gerbertem i Abbonem řešená problematika je nezbytnou výbavou pro hráče rithmomachie. Také proto byla samotná rithmomachie považována za pe-

[91] Srov. Gillian R. EVANS – Alison M. PEDEN, „Natural Science and the Seven Liberal Arts in Abbo of Fleury's Commentary on the Calculus of Victorius of Aquitaine." *Viator*, roč. 16, 1985, s. 109–127.

[92] Edice obou textů vydal Arno Borst – viz *Das Rundschreiben Asilos von Würzburg*. In: Arno BORST, *Das mittelalterliche Zahlenkampfspiel*. Heidelberg: Universitätsverlag Carl Winter 1986, s. 330–334; resp. *Das Gutachten Hermanns von Reichenau*. In: *ibid*., s. 335–339. Blíže k těmto prvním dvěma pojednáním o rithmomachii viz *ibid*., s. 50–97.

[93] Viz např. Marco FOLKERTS, „'Rithmomachia', a Mathematical Game from the Middle Ages." In: *Essays on Early Medieval Mathematics: The Latin Tradition*. Aldershot: Ashgate 2003, s. XI-5.

[94] Viz např. Ann E. MOYER, *The Philosophers' Game. Rithmomachia in Medieval and Renaissance Europe*. Ann Arbor: University of Michigan Press 2001, s. 20–22; Jorge Nuno SILVA, „Teaching and playing 1000 years ago, Rithmomachia." In: SIGISMONDI, C. (ed.), *Orbe novus. Astronomia e Studi Gerbertiani*. Roma: Universitalia, 2010, s. 146–147; Jorge Nuno SILVA, „Mathematical games in Europe around the year 1000." *Gerbertus*, roč. 1, 2010, s. 224 atd.

[95] Viz např. oxfordský rukopis St. John's College 17 [online], kde jsou (f. 56v) představeny číselné hodnoty z herních žetonů mezi abacistickými pojednáními – dostupné z: <http: / / digital. library.mcgill.ca / ms-17 / folio.php?p=56v> [cit. 14. 2. 2013]. Srov. také Gillian R. EVANS, „The Rithmomachia: A Medieval Mathematical Teaching Aid?" *Janus*, roč. 63, 1976, s. 257–273; resp Gillian R. EVANS, „'*Difficillima et ardua*': Theory and Practice in Treatises on the Abacus, 950–1150." *Journal of Medieval History*, roč. 3, 1977, s. 26–27.

[96] ASILO, *Rithmomachia* 1, s. 330; HERMANNUS, *Rithmomachia* 1, s. 335.

dagogickou pomůcku k pochopení boethiovské teoretické aritmetiky. Aniž by zde byla detailně představena pravidla této hra, pro ilustraci využití práce s číselnými poměry jistě postačí, když bude načrtnuto výchozí postavení žetonů na hrací desce, které již samo o sobě odráží níkomachovsko-boethiovské učení o relativních vlastnostech čísel a posloupnostech (viz tab. 8).

	I	II	III	IV	V–VI / VIII	6 / 8–5	4	3	2	1	
a	361	*190*	***100***					***9***	15	25	**A**
b	225	120	***90***					***6***	45	81	**B**
c		***64***	**81**	**9**			**2**	**4**	***25***		C
d		***56***	**49**	**7**			4	**16**	***20***		D
e		***30***	**25**	**5**			**6**	**36**	***42***		E
f		***36***	**9**	**3**			**8**	**64**	***49***		**F**
g	121	66	***12***					***72***	*91*	169	**G**
h	49	28	***16***					***81***	153	289	**H**
	I	II	III	IV	V–VI / VIII	6 / 8–5	4	3	2	1	

Tabulka 8: *Rithmomachie, výchozí postavení žetonů.*

Na jedné straně hracího plánu jsou žetony, které odráží sudé poměry, na druhé straně se nachází liché poměry. Hodnoty na žetonech reflektují násobky, superpartikulární a superparcientní poměry.[97] Násobky na sudé straně reprezentuje dvojnásobek (2 – 4; na hracím plánu v tab. 8 C4–C3), čtyřnásobek (4 – 16; D4–D3), šestinásobek (6 – 36; E4–E3) a osminásobek (8 – 64; F4–F3), na liché straně pak trojnásobek (3 – 9; fIV–fIII), pětinásobek (5 – 25; eIV–eIII), sedminásobek (7 – 49; dIV–dIII) a devítinásobek (9 – 81; cIV–cIII).[98] Superpartikulární poměry v sudé sestavě představují půldruhanásobek (6 – 9; B3–A3), pětičtvrtinový násobek (20 – 25; D2–C2), sedmišestinový násobek (42 – 49; E2–F2) a devítiosminový násobek (72 – 81; G3–H3), v lichém uspořádání čtyřtřetinový násobek (12 – 16; gIII–hIII), šestipětinový násobek (30 – 36; eII–fII), osmisedminový násobek

[97] ASILO, *Rithmomachia* 1–5, s. 330–331; HERMANNUS, *Rithmomachia* 1–2, s. 335.

[98] ASILO, *Rithmomachia* 3, s. 331: „Hinc octo albi minores ex pari denominatas multiplices ostendant proportiones, duplam ut IIII ad II, quadruplam ut XVI ad IIII, sescuplam ut XXXVI ad VI, octuplam ut LXIIII ad VIII. His opponantur eiusdem generis octo nigri minores ex impari denominatas habentes proportiones, triplam ut VIIII ad III, quincuplam ut XXV ad V, septuplam ut XLVIIII ad VII, nonuplam ut LXXXI ad VIIII.“

(56 – 64; dII–cII) a desetidevítinový násobek (90 – 100; bIII–aIII).[99] V obou blocích jsou přítomny také čtyři superparcientní poměry: sudá enkláva zahrnuje pětitřetinový násobek (15 – 25; A2–A1), devítipětinový násobek (45 – 81; B2–B1), třináctisedminový násobek (91 – 169; G2–G1) a sedmnáctidevítinový násobek (153 – 289; H2–H1), tzn. větší číslo v sobě obsahuje číslo menší a ještě dva, čytři, šest, resp. osm dílů menšího čísla; lichá sestava čítá sedmičtvrtinový násobek (28 – 49; hII–hI), jedenáctišestinový násobek (66 – 121; gII–gI), patnáctiosminový násobek (120 – 225; bII–bI) a devatenáctidesetinový násobek (190 – 361; aII–aI), tj. větší číslo je složeno z čísla menšího a ze tří, pěti, sedmi a devíti dílů čísla menšího.[100] Názorněji viz tab. 9.

<table>
<tr><th colspan="8">sudá sestava</th><th></th></tr>
<tr><td>2</td><td rowspan="2">2 : 1</td><td>4</td><td rowspan="2">4 : 1</td><td>6</td><td rowspan="2">6 : 1</td><td>8</td><td rowspan="2">8 : 1</td><td rowspan="2">násobky</td></tr>
<tr><td>4</td><td>16</td><td>36</td><td>64</td></tr>
<tr><td>6</td><td rowspan="2">3 : 2</td><td>20</td><td rowspan="2">5 : 4</td><td>42</td><td rowspan="2">7 : 6</td><td>72</td><td rowspan="2">9 : 8</td><td rowspan="2">superpartikulární poměry</td></tr>
<tr><td>9</td><td>25</td><td>49</td><td>81</td></tr>
<tr><td>15</td><td rowspan="2">5 : 3</td><td>45</td><td rowspan="2">9 : 5</td><td><u>91</u></td><td rowspan="2">13 : 7</td><td>153</td><td rowspan="2">17 : 9</td><td rowspan="2">superparcientní poměry</td></tr>
<tr><td>25</td><td>81</td><td>169</td><td>289</td></tr>
<tr><th colspan="8">lichá sestava</th><th></th></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="2">3 : 1</td><td>5</td><td rowspan="2">5 : 1</td><td>7</td><td rowspan="2">7 : 1</td><td>9</td><td rowspan="2">9 : 1</td><td rowspan="2">násobky</td></tr>
<tr><td>9</td><td>25</td><td>49</td><td>81</td></tr>
<tr><td>12</td><td rowspan="2">4 : 3</td><td>30</td><td rowspan="2">6 : 5</td><td>56</td><td rowspan="2">8 : 7</td><td>90</td><td rowspan="2">10 : 9</td><td rowspan="2">superpartikulární poměry</td></tr>
<tr><td>16</td><td>36</td><td>64</td><td>100</td></tr>
<tr><td>28</td><td rowspan="2">7 : 4</td><td>66</td><td rowspan="2">11 : 6</td><td>120</td><td rowspan="2">15 : 8</td><td><u>190</u></td><td rowspan="2">19 : 10</td><td rowspan="2">superparcientní poměry</td></tr>
<tr><td>49</td><td>121</td><td>225</td><td>361</td></tr>
</table>

Tabulka 9: *Hrací žetony rithmomachie s poměry, které určují jejich hodnoty*

[99] *Ibid.* 4, s. 331: „Retro albos octo existant rubri ex genere superparticulari, ut sesqualteri iuncti sint duplis, sesquiquarti quadruplis, sesquisexti sescuplis, sesquioctavi octuplis. Item retro nigros ex eodem genere octo maiores existant albi, ut sesquitercii iuncti sint triplis, sesquiquinti quincuplis, sesquiseptimi septuplis, sesquinoni nonuplis."

[100] *Ibid.* 5, s. 331: „Retro rubros octo existant maiores nigri ex genere superpartienti, ut superbipartientes iuncti sint sesqualteris, superquadripartientes sesquiquartis, supersexpartientes sesquisextis, superoctopartientes sesquioctavis. Item retro albos maiores octo existant ex eodem genere coloris viridis, ut supertripartientes iuncti sint sesquiterciis, superquinquepartientes sesquiquintis, superseptempartientes sesquiseptimis, supernovempartientes sesquinonis."

Obě strany mají jednu speciální figuru, tzv. pyramidu, která je v tab. 8 a 9 vyznačena podtržením a v samotné hře není na rozdíl od ostatních žetonů tvořena jednou hrací položkou, nýbrž několika na sebe poskládanými žetony. V sudém týmu je to hodnota 91 (G2), jež je tvořena šesti žetony, které odpovídají stejnosti 1 (tj. 1 : 1) a pěti násobným poměrům – dvojnásobku (4, tj. 2 · 2), trojnásobku (9, tj. 3 · 3), čtyřnásobku (16, tj. 4 · 4), pětinásobku (25, tj. 5 · 5) a šestinásobku (36, tj. 6 · 6), přičemž součet těchto hodnot (1, 4, 9, 16, 25 a 36) dává 91.[101] Na liché straně je pyramida tvořena pěti žetony a reprezentována hodnotou 190 (aII), což je součet zástupců pěti násobných poměrů – čtyřnásobku (16, tj. 4 · 4), pětinásobku (25, tj. 5 · 5), šestinásobku (36, tj. 6 · 6), sedminásobku (49, tj. 7 · 7) a osminásobku (64, tj. 8 · 8).[102]

Už z tohoto výchozího postavení hracích kamenů s čísly na herním plánu je zřejmé, že bez znalostí aritmetiky, především pak práce s číselnými poměry, by nebylo možno tuto ve středověku populární hru hrát. A navíc takovéto využití teoretické problematiky by kupř. plně korespondovalo s tak často deklarovaným praktickým zacílením Gerbertových znalostí – tzv. „*Saltus Gerberti*“ by mohl dosti pravděpodobně představovat určitý návod adresovaný Konstantinovi ke snadnějšímu pochopní základům této intelektuální zábavné hry.

VIII.

Tematika číselných poměrů a posloupností, jak byla prezentována Boethiovým *Úvodem do aritmetiky*, zaujala raně středověké intelektuály natolik, že jí věnovali hned několik glos, komentářů či stručných výkladových textů. Zdá se, že vedle teologicko-metafyzické motivace zájmu o tuto problematiku, stála v centru pozornosti myslitelů konce 10. století i mnohočetná aplikace souhrnu probíraných tezí. Vedle hudby, gramatiky a dalších svobodných umění byla otázka převodů nestejnosti na stejnost a hledání vztahů mezi jednotlivými číselnými řadami, jež byly uspořádány podle určitého

[101] HERMANNUS, *Rithmomachia* 4, s. 337: „In illa parte tabulae, ubi omnes species denominantur ex pari, posita est piramis XCI. Quam si offendat sua basis XXXVI aut numerus, qui cum quantitate interiacentium camporum basim efficiat, non solum piramidem, sed omnes tetragonos unde existat aufert.“ Srov. také ASILO, *Rithmomachia* 8, s. 332.

[102] ASILO, *Rithmomachia* 8, s. 332–333: „Idem fiat de pyramide CXC contrariae partis, similiter ex tetragonis composita et ter curta nominata, cuius basis est LXIIII. Non solummodo his basibus LXIIII et XXXVI pyramides auferantur, sed quicumque numeri cum quantitate spaciorum multiplicati easdem bases efficiant, pyramides auferant.“ Srov. také HERMANNUS, *Rithmomachia* 4, s. 337.

typu nestejnosti, důležitá také pro dobově (doklady jsou od první poloviny 11. století) populární hru rithmomachie, při níž vítězí mj. ten, kdo je schopen žetony s číselnými hodnotami uspořádat do aritmetické, geometrické či harmonické posloupnosti. K tomu je nezbytná znalost Boethiova *Úvodu do aritmetiky*, pročež byla tato intelektuální zábavná hra využívána pro snadnější pochopení dané látky.

Svou roli pro četnost debat nad Boethiovým textem na sklonku 10. století patrně sehrál i patrný nesoulad mezi poslední kapitolou první knihy *Úvodu do artimetiky* a první kapitolou druhé knihy téhož díla. Matematický obsah, který dodnes neztrácí na aktualitě, umocněný (nejen) dobovým hojným praktickým využitím, a možné interpretační rozdíly plynoucí ze znění Boethiova učebnicového díla se zřejmě staly živnou půdou pro odlišný výklad převodů nestejností na počáteční stejnost, jak ho prezentovali na jedné straně Notker z Lutychu a na straně druhé Gerbert z Aurillacu a Abbo z Fleury.